Специальный математический практикум

с.н.с. Уфимцев Михаил Валентинович
факультет ВМК МГУ

<u>Доверительные интервалы</u>.

1. Предположим, что случайные ошибки имеют распределение $N(0, \sigma^2)$, а результаты измерений равноточны и не содержат систематических ошибок, дисперсия σ^2 неизвестна, 100·γ-%-ный центральный доверительный интервал для м.о. μ равен

$$\bar{x} - s/\sqrt{n} \cdot t_{n-1,1-\alpha/2} \le \mu \le \bar{x} + s/\sqrt{n} \cdot t_{n-1,1-\alpha/2}, \qquad (62)$$

где s^2 определена в (42). Если же σ^2 известна, то 100·γ-%-ный центральный доверительный интервал для м.о. μ равен

$$\bar{x} - \sigma/\sqrt{n} \cdot u_{1-\alpha/2} \le \mu \le \bar{x} + \sigma/\sqrt{n} \cdot u_{1-\alpha/2}. \qquad (62')$$

2. Если $x_1, ..., x_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, а $y_1, ..., y_m \sim N(\xi, \Delta\cdot\sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$ неизвестно, величина $\Delta > 0$ известна, $\bar{x}$ – выборочное среднее (41), а

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_j, \quad s^2 = [\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + 1/\Delta\sum_{j=1}^{m}(y_j - \bar{y})^2]/(n+m-2), \qquad (63)$$

то интервал

$$(\bar{y} - \bar{x} - s\cdot t_{m+n-2,1-\alpha/2}\cdot\sqrt{(\Delta\cdot n+m)/(m\cdot n)}, \bar{y} - \bar{x} + s\cdot t_{m+n-2,1-\alpha/2}\cdot\sqrt{(\Delta\cdot n+m)/(m\cdot n)} \qquad (64)$$

является несмещённым $(1 - \alpha)\cdot 100\%$-ным доверительным интервалом для систематической ошибки $\delta = \xi - \mu$.

3. Пусть извлечены две независимые выборки объемов n_1 и n_2 из популяции с распределением $N(\mu,\sigma^2)$. Выборочные оценки μ – математического ожидания и σ^2 – дисперсии по этим выборкам суть $\bar{x}_1, \bar{x}_2, s_1^2, s_2^2$. Объединённые оценки м.о. и дисперсии по выборке объема $n_1 + n_2$ суть

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}, \quad S^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Если σ^2 известна, то доверительный интервал для μ равен

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n_1 + n_2}}\cdot u_{1-\alpha/2} < \mu < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n_1 + n_2}}\cdot u_{1-\alpha/2}. \qquad (65)$$

Если же σ^2 неизвестна, то $\hat{\sigma}^2 = S^2$, и доверительный интервал для μ

$$\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n_1 + n_2}} \cdot t_{n_1+n_2-2,\, 1-\alpha/2} \;<\; \mu \;<\; \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n_1 + n_2}} \cdot t_{n_1+n_2-2,\, 1-\alpha/2} \;. \qquad (66)$$

Задания по практикуму и задачи

ТЕМА 1: Доверительные интервалы.

Теория

Пусть одна и та же величина μ регистрируется многократно (n раз) со случайными ошибками ε_i , так что сумма $\xi = \mu + \varepsilon$ реализуется как серия (выборка) независимых одинаково распределённых с.в.

$$x_i = \xi_i = \mu + \varepsilon_i . \qquad (1)$$

Параметры $\vec{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_k)^T$, $\vec{\theta} \in \Theta$ распределения $F(x: \vec{\theta})$ с.в. ξ мы не знаем, а можем лишь оценить их по выборке $x_1, ..., x_n$. Любая с.в. $\vec{T} = \vec{T}(x_1, ..., x_n)$ называется *статистикой*. Если $\vec{T}$ используется как приближение к $\vec{\theta}$, то она называется *оценкой* $\vec{\theta}$. Мы должны уметь оценить её точность. Она оценивается либо величиной дисперсии компонент $Var(T_j), j = 1, ..., k$, либо строятся *доверительные интервалы*. Пусть, для простоты, $\vec{\theta} = \theta$ – скаляр. В интервальном оценивании мы ищем две статистики $T_i = T_i(x_1, ..., x_n), i = 1, 2$ такие, что $T_1 < T_2$, и для этих статистик выполняется условие

$$P\{ T_1(x_1, ..., x_n) < \theta < T_2(x_1, ..., x_n)\} \geq \gamma \qquad (2)$$

для всех $\theta \in \Theta$. Величина $\gamma \in (0, 1)$ называется *уровнем доверия*, а (случайный) интервал (T_1, T_2) – γ-доверительным интервалом для θ. Его длина $T_2 - T_1$ характеризует точность локализации неизвестного параметра, т.е. “надёжность” утверждения, что $\theta \in (T_1, T_2)$. При этом вероятность ошибки не превосходит $1 - \gamma$. На практике γ берут близким к 1 ($\gamma = 0.95$, $\gamma = 0.99$ – “стандартные” значения γ). В случае векторного параметра $\vec{\theta}$ рассматривают *доверительные области*, но мы этого делать не будем, так как в случае $\xi \sim Bi(n, p)$ (n задано) или $\xi \sim Po(\theta)$ имеем единственный неизвестный параметр, а в случае нормального распределения с двумя параметрами μ и σ^2 доказано, что наилучшие оценки для них, $\bar{x}$ и S^2, статистически независимы (теорема Фишера), и можно построить доверительные интервалы на основе этих статистик независимо для каждого параметра μ, σ^2.

Обычно рассматривают *центральные доверительные интервалы* : дополнительную вероятность ($1 - \gamma$) делят пополам:

$$\delta = (1 - \gamma)/2, \qquad (3)$$

и строят статистики T_1, T_2 из условий:

$$F(T_1\,;\,\theta) = (1 - \gamma)/2 = \delta,\quad 1 - F(T_2\,;\,\theta) = \delta. \;\Rightarrow\; F(T_2\,;\,\theta) = (1 + \gamma)/2 \qquad (4)$$

Конечно, возможно найти точный доверительный интервал типа (4) только в том случае, когда известно точное распределение статистики T (это так для нормального распределения). В противном случае обычно можно найти приближённые доверительные интервалы, используя оценки максимального правдоподобия.

На практике чаще всего необходимо дать интервальные оценки для параметров нормального распределения μ и σ^2. Соответствующие доверительные интервалы суть:

$$\bar{x} - s/\sqrt{n}\cdot t_{n-1,(1+\gamma)/2} \le \mu \le \bar{x} + s/\sqrt{n}\cdot t_{n-1,(1+\gamma)/2}$$

(5)

где s^2 – выборочная дисперсия (100·γ-%-ный доверительный интервал для м.о. μ), и

$$(n-1)\cdot s^2/\chi^2_{n-1,(1-\gamma)/2} \ge \sigma^2 \ge (n-1)\cdot s^2/\chi^2_{n-1,(1+\gamma)/2}$$

(6)

– центральный доверительный интервал для σ^2. Здесь $t_{n-1,\gamma}$ – $100\cdot\gamma$- ная точка распределения Стьюдента с $n - 1$ степенью свободы, т.е. решение уравнения

$$\int_{-\infty}^{t_{n-1,\gamma}} f_{n-1}(z)dz = \gamma$$ (здесь $f_{n-1}(z)$ – плотность распределения Стьюдента),

а $\chi^2_{n-1,\gamma}$ – $100\cdot\gamma$- ная точка распределения χ^2 с $n - 1$ степенью свободы, т.е. решение уравнения

$$\int_{0}^{\chi^2_{n-1}} g_{n-1}(z)dz = \gamma$$ (где $g_{n-1}(z)$ – функция плотности вероятностей χ^2 – распределения).

В некоторых случаях (и это отражено в нескольких задачах нашего практикума) рассматривается построение доверительных интервалов для двух выборок, параметры которых связаны пропорциональной зависимостью. Так, если $x_1, \ldots, x_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, а $y_1, \ldots, y_m \sim N(\xi, \Delta\cdot\sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$ неизвестно, величина $\Delta > 0$ известна, $\bar{x}$ – выборочное среднее (29), а $\bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_j$,

$$S^2 = \left[\,\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{m}(y_j - \bar{y})^2\,\right] / (n+m-2), \qquad (7)$$

то интервал

$$(\bar{y}-\bar{x}-S\cdot t_{m+n-2,1-\alpha/2}\cdot\sqrt{(\Delta\cdot n+m)/(m\cdot n)},\bar{y}-\bar{x}+S\cdot t_{m+n-2,1-\alpha/2}\cdot\sqrt{(\Delta\cdot n+m)/(m\cdot n)} \quad (8)$$

является несмещённым $(1-\alpha)\cdot 100\%$-ным доверительным интервалом для систематической ошибки $\delta=\xi-\mu$.

Аналогично, если рассматриваются две выборки $x_1, ..., x_n \sim N(\mu_1, \Delta\cdot\sigma^2)$, и $y_1, ..., y_m \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, то центральный γ–доверительный интервал для Δ имеет вид

$$\left(\frac{S_x^2}{S_y^2}/F_{n-1,m-1,(1+\gamma)/2}, \frac{S_x^2}{S_y^2}/F_{n-1,m-1,(1-\gamma)/2}\right), \quad (9)$$

где $S_x^{\,2}$ и $S_y^{\,2}$ – выборочные дисперсии для выборок $x_1, ..., x_n$ и $y_1, ..., y_m$, соответственно:

$$S_x^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2, \quad S_y^2=\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(y_j-\bar{y})^2, \quad (10)$$

а $F_{n-1,\, m-1,\, \gamma}$ – $100\cdot\gamma$- ная точка F– распределения с $n-1$, $m-1$ степенями свободы, т.е. решение уравнения

$$\int_0^{F_{n-1,\,m-1,\,\gamma}} h_{n-1,\,m-1}(z)dz=\gamma$$ ($h_{n-1,\,m-1}(z)$ – функция плотности F – распределения).

Задачи

38. Найдите 99 %-ный доверительный интервал для разности средних значений времени измерения для контролеров A и D из упражнения 37 (см. задачи по теме 2).

46. Найдите 95 %-ный доверительный интервал для дисперсии коэффициента преломления различных образцов стекла, если по выборке, включающей 10 образцов, получены следующие результаты:

1.589	1.587	1.559	1.596	1.583
1.569	1.574	1.592	1.590	1.561

65. При определении величины заряда электрона $e0*10^{-10}$ Милликен получил n = 58 независимых измерений x_i величины e0. Выборочное среднее и выборочная дисперсия оказались равными соответственно

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=4.7808$$

и

$$s_x^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=22981*10^{-8}.$$

Предполагая, что ошибки измерений распределены нормально, а результаты измерений равноточны и лишены систематической ошибки, построить 100*γ%-ный доверительный интервал для e0 с γ = 0.9.

66. Для определения точности регистрирующего прибора было произведено 5 независимых измерений. Получены результаты: y(1) = 2781, y(2) = 2836, y(3) = 2807, y(4) = 2763, y(5) = 2858. Определить приближенное значение дисперсии и среднего квадратического отклонения, характеризующих точность прибора, если значение измеряемой величины а) известно и равно $\bar{y}$ = 2800; б) неизвестно. Оценить точность.

84. Измеряемая с.в. x подчиняется закону распределения $N(10, 25)$. Найти симметричный относительно математического ожидания μ_x интервал, в который с вероятностью p попадет измеренное значение. Рассмотреть следующие числовые значения: а) p =0.9974; б) p = 0.9544; в) p = 0.50.

87. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение x от номинала не превышает 10 мм. Точность изготовления деталей характеризуется стандартным отклонением σ. Считая, что для данной технологии σ = 5 и x распределено нормально, выяснить, сколько процентов годных деталей изготовляет автомат.

88. В условиях предыдущей задачи выяснить, какой должна быть точность изготовления, чтобы процент годных деталей повысился до 98 ?

89. Деталь изготовляется на станке. Ее размер x представляет собой случайную величину, распределенную по закону $N(20$ см, 0.2 см$^2)$. Какую относительную точность изделия можно гарантировать с вероятностью 0.95 ?

В задачах 91-94 найти, пользуясь (65) и (66), 90% - и 99%-ные доверительные интервалы для μ.

91. Емкость конденсатора, если в ходе первого выборочного обследования было получено $n_1 = 16$, $\bar{x}_1$ = 20 мкФ, σ = 4 мкФ известно, а n_2 = 9 и $\bar{x}_2$ = 18 мкФ.

92. Время безотказной работы электронной лампы, если для первой выборки $n_1 = 100$, $\bar{x}_1$ = 500 час., σ известно и равно 10 час. Для второй выборки n_2 = 64 и $\bar{x}_2$ = 480 час.

93. Диаметр вала, если $n_1 = 9$, $\bar{x}_1$ = 30 мм, s_1^2 = 9 мм^2; $n_2 = 16$, $\bar{x}_2$ = 29 мм, s_2^2 = 4.5 мм^2.

94. Содержание углерода в единице продукта, если $n_1 = 25$, $\bar{x}_1$ = 18 г, s_1^2 = 16 г^2; $n_2 = 9$, $\bar{x}_2$ = 18.8 г, s_2^2 = 20 г^2.

123. Два независимых равноточных измерения угла дали результаты (в °) 20.76 и 20.98. Другие шесть независимых и равноточных измерений были выполнены с помощью другого прибора и дали результаты 21.64, 21.54, 22.32, 20.56, 21.43 и 21.07. Случайные ошибки распределены нормально, и известно, что первый прибор менее точен, чем второй, в том смысле, что ему соответствует дисперсия, превышающая в 4 раза дисперсию второго прибора. Найти доверительные интервалы для разности систематических ошибок этих приборов. Уровень доверия $\gamma = 0.95$.

125. Две лаборатории измеряли концентрацию (в %) серы в стандартных образцах дизельного топлива. Шесть независимых измерений в первой лаборатории дали 0.869, 0.874, 0.867, 0.875, 0.870, 0.869. В пяти подобных измерениях во второй лаборатории получено 0.865, 0.870, 0.866, 0.871, 0.868. В предположении нормального распределения ошибок постройте 90%–ный доверительный интервал для отношения измерений дисперсии в двух лабораториях. Если есть основания считать, что дисперсии одинаковы, постройте доверительный интервал для разности систематических ошибок в обоих лабораториях.

149. Среднее время выхода кислородного конвертера на температурный режим для двух последовательных дней составило 22.0 и 20.2 мин.

а) Определите 99%–ный доверительный интервал для математического ожидания изменения этого времени от одного дня к другому, если известно, что дисперсия каждого из этих выборочных средних составляет 2.00 мин ^{2}.

б) Подтверждает ли этот доверительный интервал предположение о равенстве средних значений в разные дни ?

150. Найдите 99%–ный доверительный интервал для разности средних значений времени измерения для контролёров A и D из задачи 37 (см. задачи по теме 2).

151. Проверьте по данным, приведённым в задаче 39 (см. задачи по теме 4), гипотезу об однородности дисперсий. Определите 95%–ный доверительный интервал для общего значения сопротивления, если принята нулевая гипотеза.

155. Определите 95%–ный доверительный интервал для разности двух средних значений $\mu_A - \mu_B$, если $\bar{x}_A = 13.8$, $\bar{x}_B = 16.2$, $n_A = 15$, $n_B = 20$, а также известно, что дисперсии сравниваемых совокупностей равны $\sigma^2 = 4.41$. Вычислите 95% –ные доверительные интервалы раздельно для μ_A и μ_B Сравните первый из доверительных интервалов с двумя последними.

ТЕМА 2: Проверка гипотез о параметрах нормального распределения.

Общие положения. Часто бывает нужно проверить то или иное утверждение о свойствах наблюдаемых в эксперименте случайных величин: о значениях параметров распределения, о форме распределения, различаются или нет две серии наблюдений и т.п. Рассуждения при этом примерно такие: пусть проверяется гипотеза о том, что значение параметра θ равно θ_0, альтернативой является $\theta = \theta_1 \neq \theta_0$ (для определённости пусть $\theta_1 > \theta_0$). Мы выбираем такую статистику T, чтобы вероятность $p_0 = P\{T > \theta_0\}$ была бы мала: $p_0 << 1$, но если $\theta = \theta_1$, эта вероятность была бы существенна:

$$p_1 = P\{T > \theta_0 \mid \theta_1\} = 1 - \varepsilon, \varepsilon << 1.$$

Тогда мы можем вычислить по наблюдавшейся серии данных x_1 , ..., x_n значение $T = T(x_1 , ..., x_n)$. Будем рассуждать так: если наше предположение верно ($\theta = \theta_0$), то крайне маловероятно (скажем, $p_0 = 0.01$), чтобы значение T превышало θ_0 – это один шанс из ста. Если же это, тем не менее, произошло, то, видимо, наше исходное предположение было не верно, и следует отвергнуть гипотезу $\theta = \theta_0$.

Примерно по такой логике построен аппарат проверки статистических гипотез. Любое предположение о виде или свойствах наблюдаемой в эксперименте с.в. называется *статистической гипотезой*. Если гипотеза H_0 (*нулевая гипотеза*) сформулирована для изучаемого процесса, мы проверяем её, строя правило (алгоритм), которое позволяет принять или отвергнуть H_0 на основании наблюдений. Такое правило называется *критерием* для гипотезы H_0. Пусть исход эксперимента – n независимых реализаций с.в. ξ (выборка $\vec{\boldsymbol{x}} = (x_1, ..., x_n)^T$). Предположим, что статистика $T = T(\vec{\boldsymbol{x}})$ описывает отклонение экспериментальных данных от теоретических (в предположении, что H_0 верна) величин, и распределение T известно, когда H_0 верна. Тогда для любого достаточно малого числа $\alpha > 0$ можно определить подмножество $w_\alpha = \{t{:}\ t \in T(\vec{\boldsymbol{x}}), \vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}\}$, которое удовлетворяет (точно или приближённо) условию

$$P\{T \in w_\alpha | H_0\} \le \alpha \qquad (11)$$

Тогда алгоритм проверки гипотезы H_0 следующий: если вычислено значение $t = T(\vec{\boldsymbol{x}})$ на основе наблюдавшихся данных, то H_0 отвергается при $t \in w_\alpha$, в противном случае заключаем, что данные не противоречат H_0. При таком правиле, если H_0 верна, мы можем отвергнуть её (т.е. принять неверное решение) с вероятностью, меньшей или равной α. Число α называется *уровнем значимости* критерия, а множество w_α называется *критическим множеством (областью)* для гипотезы H_0. Заметим, что при такой процедуре принятия решения может быть не одно, а много критических множеств для заданного уровня значимости α, в зависимости от того, какую статистику критерия $T(\vec{\boldsymbol{x}})$ мы используем, и непростая задача – найти наилучшее (в некотором смысле; см. определение *мощности критерия* в учебниках по статистике). Так как наша задача – научиться применять уже рекомендованные теорией критерии, дальнейшим обсуждением этого вопроса мы заниматься не будем. Заметим только, что выбор критического множества требует знания не только нулевой гипотезы H_0, но и альтернативы H_1. Если этого не учитывать, то возможно в качестве w_α взять такое, что вероятность

$$P\{T \in w_\alpha | H_1\} \le \alpha_1 << \alpha, \qquad (12)$$

так что попадание t в критическое множество будет ещё менее вероятно при H_1, чем при H_0.

В правильно сконструированных (*несмещённых*) критериях и соответствующих критических множествах w_α

$$P\{T \in w_\alpha | H_1\} \ge \beta > \alpha. \qquad (13)$$

Переходя от абстрактных определений теории статистических гипотез к более конкретным темам, следует сказать, что в практике обработки данных чаще всего рассматриваются два класса задач: (а) проверка гипотез о параметрах нормального распределения и (б) критерии согласия, т.е. проверка, что выборка $x_1, ..., x_n$ имеет заданное распределение $F(x)$. Компактная сводка материала по первому типу задач дана в табл.8.5 книги Джонсон Н., Лион Ф. *Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: Методы обработки данных*. М.: Мир. 1980 ; эта таблица воспроизведена и нашей книге на стр.34. Однако необходимы некоторые разъяснения, помогающие детализировать общие положения теории проверки статистических гипотез.

Пусть нас интересует значение математического ожидания μ нормального распределения. Подлежит проверке гипотеза H_0 : $\mu = \mu_0$ – заданному значению. Но что рассматривать в качестве альтернативы ? Возможно рассмотрение альтернативы H_1 : $\mu = \mu_1 \neq \mu_0$. В таком случае нужно сконструировать критическое множество, которое отвергало бы H_0 в пользу H_1 , если либо $\mu_1 < \mu_0$, либо $\mu_1 > \mu_0$ (двусторонний критерий). Или же нас мало беспокоит ситуация, когда $\mu_1 > \mu_0$, а вот значения $\mu_1 < \mu_0$ для нас нежелательны (односторонний критерий). Из статистики известно, что разумные (мощные) критерии для значений μ строятся на основе выборочного среднего $\bar{x}$, так что при одностороннем критерии значение

$$\bar{x} < \mu_0 - \Delta' \tag{14}$$

(если вы посмотрите в табл. 8.5, то увидите, чему равно Δ'). С другой стороны, при двустороннем критерии как малые, так и большие по сравнению с μ_0 значения $\bar{x}$ говорят не в пользу H_0 , так что при выполнении неравенства

$$| \bar{x} < \mu_0 | > \Delta \tag{15}$$

H_0 отвергается в пользу H_1 .

Зачем всё это вам ? Дело в том, что ещё *до* проверки гипотезы, при постановке задачи нужно уяснить, с какой альтернативой H_1 вы имеете дело. Обычная практика – уровень значимости α выбирается заранее *ещё до* сбора наблюдений. Критическое множество Δ', Δ в (14) и (15) зависит от уровня значимости α . Так как во втором случае (15) неравенство берётся по модулю, то наиболее часто критические значения выбирают симметрично, т.е. (15) сводится к совокупности двух неравенств:

$$\begin{cases} \bar{x} < \mu_0 - \Delta, \\ \bar{x} > \mu_0 + \Delta, \end{cases} \tag{15'}$$

причём совместная вероятность событий (15') равна α:

$$P\{ \bar{x} < \mu_0 - \Delta \cup \bar{x} > \mu_0 + \Delta \} = \alpha, \tag{16}$$

и так как эти два события не пересекаются, из соображений симметрии получаем

$$P\{ \bar{x} < \mu_0 - \Delta\} = P\{ \bar{x} > \mu_0 + \Delta \} = \alpha / 2 = \alpha_1 \quad . \tag{16'}$$

Т.е. для двусторонних критериев обычно берут *половину* уровня значимости для вычисления критического значения Δ .

Вы, быть может, заметили, что в случае двусторонних критериев процедура проверки гипотез тесно связана с построением доверительных интервалов. Действительно, если рассматривать центральный γ–доверительный интервал (скажем, с $\gamma = 0.95$) для μ :

$$\bar{x} - \Delta < \mu < \bar{x} + \Delta, \qquad (17)$$

то событие $\{|\bar{x} - \mu| \geq \Delta\}$ будет иметь вероятность $\alpha = 1 - \gamma$, а $\alpha_1 = (1 - \gamma)/2$ определяет критическое значение Δ для двустороннего статистического критерия. Если представить это наглядно, например, в случае нормального распределения, то центральный γ-доверительный интервал есть отрезок с центром в $\bar{x}$, причём площадь криволинейной трапеции, которую этот отрезок отсекает от всего графика плотности вероятности, равна γ и она расположена в центральной части "колокольчика". Дополнительные части графика на "хвостах" функции плотности вероятности как раз образуют критическое множество $\bar{x} < \mu_0 - \Delta \cup \bar{x} > \mu_0 + \Delta$ для проверки двусторонней гипотезы, а площадь графика под "хвостами" в сумме равна $\alpha = 1 - \gamma$. Отмеченный дуализм широко используется при интерпретации экспериментальных данных.

В практике обработки результатов экспериментов вам могут встретиться следующие задачи:

I. Дана единственная выборка $x_1, ..., x_n$ из нормального распределения $N(\mu, \sigma^2)$, и нужно проверить гипотезы о значениях параметров μ и σ^2.

II. Даны <u>две</u> выборки $x_1, ..., x_n$ и $y_1, ..., y_m$, $n \neq m$, из нормального распределения с параметрами μ_1, σ_1^2 и μ_2, σ_2^2, соответственно. Нужно проверить гипотезу о том, что $\mu_1 = \mu_2$ или что $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Критерии проверки гипотез в задачах I – II при различных предположениях описаны в табл. 8.5. Обобщение задачи II на случай $k > 2$ выборок описано в теоретическом обосновании данного практикума (критерий Бартлетта для общей дисперсии и проверка общего значения среднего для нескольких выборок). Остаются ещё задачи проверки среднего для парных наблюдений и несколько особняком стоящая задача проверки независимости компонент нормальной с.в. Все они описаны в теоретическом обосновании.

Задачи

2. Измерения роста в группе из 10 человек дали: 160, 160, 167, 170, 173, 176, 178, 178, 181, 181. Проверяемая гипотеза H состоит в том, что эти данные согласуются с нормальным законом распределения с параметрами: математическим ожиданием 167 и неизвестной постоянной дисперсией D. Альтернативой K служит гипотеза, что данные согласуются с нормальным законом распределения с параметрами: математическим ожиданием > 167 и неизвестной постоянной дисперсией D. Проверить.

3. На производстве испытывали 13 образцов пряжи, чтобы выяснить, не изменяется при намокании ее способность к вытягиванию. Для этого 6 произвольно отобранных образцов были проверены на растяжение, для чего подвешивался груз заданной величины. Их относительные удлинения (Y) оказались равны (в процентах)

Y = 12.3, 13.7, 10.4, 11.4, 14.9, 12.6.

Остальные 7 образцов были тщательно намочены, после чего их относительные удлинения (X) при такой же проверке с тем же самым грузом дали следующие результаты:

$$X = 15.7,\ 10.3,\ 12.6,\ 14.5,\ 12.6,\ 13.8,\ 11.9.$$

Требуется выяснить, не приводит ли намокание к изменению длины пряжи ? (Данные считать нормально распределёнными).

32. Следующие цифры представляют собой значения твердости 15 образцов сплава в условных единицах: 12.1; 13.7; 11.0; 11.6; 11.9; 12.9; 13.4; 12.2; 12.5; 11.9; 11.9; 11.5; 12.9; 13.0; 10.5. Проверьте гипотезу о том, что среднее значение твердости равно 12.0 (используйте двухсторонний критерий с $\alpha = 0.05$).

33. Проверьте, используя данные упражнения 32, гипотезу о том, что среднее квадратическое отклонение составляет 1.4 у. е.

34. Какой потребуется объем выборки для того, чтобы с доверительной вероятностью, равной 99 %, среднее выборочное значение твердости (Хсредн.) отличалось от его математического ожидания не более чем на 0.3 у.е., если стандартное отклонение известно и равно 2.0 у.е. ?

36. < Нижеследующие странные числа получились при переводе фунтов и унций англо-американской системы мер в метрическую. - М.У. > Минимальный допустимый вес консервной банки равен 1 фунту = 453.6 гр. Отклонение веса более чем на 14.175 гр. ниже этого значения является основанием для отбраковки изделия. Какие ограничения надо наложить на выборочное среднее значение, чтобы вероятность браковки не превосходила 0.001 при а) n = 10; б) n = 20; в) n = 50 ? Можно сделать предположение, что среднее квадратическое отклонение веса консервной банки составляет 2.835 гр. (Используйте уровень значимости 0.01).

37. Шариковые подшипники проходят проверку на овальность в специальном измерительном устройстве, которое автоматически фиксирует отклонение от заданных условий. Возникло подозрение, что время, необходимое для проведения проверки, у разных контролеров различно. Были отобраны 4 контролера, и время, необходимое каждому из них на проведение проверки, регистрировалось. Измерения повторялись каждым контролером 6 раз. Приведенные ниже данные представляют собой время измерения в сек.

а) Наблюдаются ли различия в скорости работы контролеров ?

б) Какие предположения необходимо сделать при выбранном критерии значимости ?

Контролёр	**Время измерения**					
A	13	12	11	14	12	13
B	14	14	16	15	14	16
C	11	14	11	13	14	11
D	12	15	14	16	13	16

41. Для определения прочности на разрыв целлофановых мешков разработан специальный критерий. Исследовались 15 мешков типа А и 20 мешков типа В. Каждый из мешков наполняли и бросали до тех пор, пока он не разрывался. Обозначим число падений мешка до момента разрыва через X. Получены следующие результаты:

Тип	**Среднее X**	**Выборочная дисперсия D**		**n**
A	75.5	44	83.17	15
B	89.3		128.20	20

а) Можно ли говорить, что мешки одного типа прочнее, чем другого ?

б) Сделайте необходимые предположения и задайте значение вероятности.

42. Дисперсия предела прочности на разрыв некоторого волокна составляет 35.63 кг**2. Ожидается, что внесенные в технологический процесс изменения снизят указанную дисперсию. В выборке объема 15 были зарегистрированы следующие значения предела прочности на разрыв в кг :

151	156	147	153	155
148	160	149	160	156
161	154	162	163	149

а) Привело ли изменение процесса к снижению дисперсии ?

б) Установите критическую область, где должно производиться отклонение гипотезы Н.

43. Исследовались потери веса 11-ти резиновых стержней при испытаниях на износ. От каждого стержня было отрезано по два образца для проведения испытаний. Один из них прошел вулканизацию при 80 градусах. а другой - при 150 градусах.

а) Можно ли утверждать, исходя из приведенных ниже данных, что наблюдается значимое различие между средними потерями веса образцов, прошедших различную вулканизацию, при $\alpha = 0.05$?

б) Какая гипотеза проверяется ?

Т° вулканизации	СТЕРЖНИ										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
80	3.02	2.22	4.60	4.53	2.31	3.11	2.70	2.58	3.27	4.19	2.90
150	2.91	2.30	4.15	2.63	2.40	3.20	2.50	2.29	3.11	3.80	2.72

44. Произведено исследование предела прочности на разрыв шести различных по химической структуре твердых смол. Было взято по два образца каждой из них. При этом требовалось выяснить, вносят ли действия операторов какое-нибудь смещение в результаты наблюдений. Двум операторам А и В предложили испытать по одному образцу смол каждого типа.

а) Можно ли говорить, что наблюдаются различия между результатами измерений у разных операторов ?

б) Если да, то определите 95 %-ный доверительный интервал для математического ожидания разности.

Смола	127	135	138	139	146	152
Оператор А	**5240**	**4975**	**5050**	**5075**	**4795**	**5190**
Оператор В	**5230**	**4980**	**5020**	**5080**	**4750**	**5120**

48. Ожидается, что после определенной термической обработки образцов стали их предел прочности на разрыв возрастет приблизительно на 1200 фунт/дюйм^2. Укажите этапы процедуры статистической проверки того, что указанный показатель удалось повысить, по крайней мере, на 1200 фунт/дюйм^2. Какие при этом нужно сделать предположения ? Как выбрать гипотезу, уровень значимости и мощность критерия ?

56. Измерения эффективного сечения реакции двумя методиками дали результаты: (а) (6.4; 7.2; 7.0; 5.8) барн; (б) (7.4; 7.5; 7.0) барн. Можно ли быть уверенным, что методики неравноправны ?

57. На основании $n = 12$ измерений оценка дисперсии $s_y^2 = 6$. Не подтверждает ли этот результат сомнение, что $D\{y\} = D1 = 7 > D0 = 4$ (уровень значимости $\alpha = 0.05$, данные распределены нормально) ?

60. За первый день счетчик зарегистрировал 20026 импульсов пуассоновского процесса, за второй день – 19580. Есть ли основания считать, что за второй день интенсивность поступления импульсов снизилась ? Уровень значимости $\alpha = 0.05$.

61. За первый час счетчик зарегистрировал 150 импульсов пуассоновского процесса, а за последующие 2 часа – 250 импульсов. Была ли одинаковой интенсивность поступления импульсов в единицу времени ? Уровень значимости $\alpha = 0.05$.

75. Требуется решить вопрос об однородности дисперсий, полученных при определении предела прочности на разрыв нескольких различных по структуре полимеров. Испытания проводились на восьми образцах каждого их шести исследуемых полимеров. Следующие числа представляют собой оценки дисперсий в кодированном виде: 3.24; 4.18; 4.06; 3.98; 4.19; 4.02 (единиц) ^{2}. Нужно проверить гипотезу H: D1 = D2 = ... = D6 (Di - дисперсия i-го полимера) для уровня значимости $\alpha = 0.01$.

77. Чтобы определить силу сцепления клеевых соединений двух стекол, были проведены испытания на растяжение. Исследовались образцы, у которых обработка склеиваемых поверхностей производилась двумя различными методами, называемыми 1) перекрестной шлифовкой и 2) торцевой обточкой.

Требуется решить при уровне значимости $\alpha = 0.05$, могут ли эти данные быть взяты из нормально распределенных совокупностей с одинаковыми средними значениями. Предположения: случайность и независимость выбора образцов при испытании соединений каждого типа, а также равенство дисперсий (общая дисперсия неизвестна).

Перекрестная шлифовка		Торцевая обточка		Перекрестная шлифовка		Торцевая обточка	
16	20	13	14	18	17	17	13
14	15	19	15	19	18	21	15
19	18	14	10				

76. / Критерий Бартлетта/ При определении предела прочности на разрыв нескольких различных по структуре полимеров испытания проводились на восьми образцах каждого из шести исследуемых полимеров. Следующие числа представляют собой оценки дисперсии в кодированном виде : 3.24; 4.18; 4.06; 3.98; 4.19; 4.02 (единиц) ^{2}. Нужно проверить гипотезу H : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_6^2$. Допустим, что необходимые предположения выполняются, а уровень значимости $\alpha = 0.01$.

79. На каждом из двух имеющихся на заводе станков производят новые изделия одного типа. При пробном пуске из 350 изделий, изготовленных на станке А, при проверке по принципу “годен - не годен”, 15 оказались дефектными. Среди 320 изделий, изготовленных для сравнения на станке В, оказалось всего 8 дефектных. Можно ли, приняв уровень значимости равным α = 0.05, ожидать, что в продукции, производимой на сравниваемых станках, окажется одинаковая доля дефектных изделий ?

82. При изучении стабильности температуры в термостате получены данные: 21.2; 21.8; 21.3; 21.0; 21.4; 21.3. Затем к стабилизатору температуры было применено некоторое усовершенствование, после чего (на другом режиме) получены данные: 37.7; 37.6; 37.6; 37.4. Можно ли при уровне значимости α = 0.05 считать усовершенствование эффективным ?

95. При измерении производительности двух агрегатов получены следующие результаты (в кг вещества за час работы) :

№ замера	1	2	3	4	5
Агрегат А	14.1	10.1	14.7	13.7	14.0
Агрегат В	14.0	14.5	13.7	12.7	14.1

Можно ли считать, что производительности агрегатов А и В одинаковы, в предположении, что обе выборки получены из нормально распределенных популяций ? Принять α = 0.10.

96. Проверить гипотезу о равенстве дисперсий трех популяций, используя следующие результаты наблюдений :

№ выборки	№ наблюдения					$\sum x_i$	$\sum x_i^2$
	1	2	3	4	5		
1	6	5	12	9	10	42	386
2	14	11	5	6	-	36	378
3	12	4	7	-	-	23	209

Принять α = 0.05.

146. В результате проведения стандартной процедуры проверки коэффициента упругости образцов резины установлено, что среднее квадратическое отклонение при измерении этого коэффициента составляет 18.0 единиц. взята выборка объёма 20 и получено s = 23.2 единицы. Обосновано ли предположение о нестабильности стандартной процедуры проверки коэффициента упругости ?

147. Чтобы выяснить, варьирует ли от одного дня к другому величина изменчивости температуры высокоскоростного аппарата, в первый день было проведено 12 измерений, а во второй 10. Среднее квадратическое отклонение в первый день (А) составило 23°, а во второй 30°. Можно ли сказать, что различий в дисперсиях, измеренных в разные дни, не обнаружено ?

152. Полный вес упаковки с натуральным красителем должен составлять 22.680 ± 0.0567 кг. Известно, что дисперсия равна $7.3139 \cdot 10^{-4}$ кг. Приведённые ниже результаты получены при исследовании выборки 20 упаковок (вес указан в кг).

а) Соответствует ли средний вес упаковки, вычисленный по приведённым ниже данным, предъявляемым требованиям ?

б) Какие нужно сделать предположения ?

(Извините за обилие знаков после запятой – это получилось в результате перевода результатов измерений в фунтах в метрическую систему).

22.72486	22.57064	22.66589	22.63414
22.71125	22.71579	22.62507	22.72486
22.64775	22.76115	22.78382	22.73847
22.59332	22.58425	22.81558	22/6296
22.54342	23.50503	22.78836	22.68404

153. На двух станках производят одинаковую продукцию. Критическим размером изделий является внешний диаметр. Установлено, что за один и тот же период времени дисперсия этой величины для первого станка А составила 1.07 мм ^{2} , а для станка В – 0.84 мм ^{2} . Со станка А была взята выборка, включающая 15 изделий, а со станка В – выборка из 10 изделий. Можно ли утверждать, что математические ожидания исследуемых величин равны между собой, если $\bar{x}_A = 45.3$ мм, а $\bar{x}_B = 46.1$ мм ?

156. Выборка А обладает дисперсией 55.4 фунт ^{2} , а выборка В – дисперсией 87.3 фунт ^{2} .

а) Можно ли сказать, что выборки взяты из совокупностей с одним и тем же значением дисперсии, если их объёмы равны соответственно 15 и 12?

б) Какие при этом необходимо сделать предположения ?

157. Исследован предел прочности на разрыв у шести плавок титанового сплава. Из слитков каждой плавки было изготовлено 5 образцов, и на них проверена однородность дисперсий предела прочности. Шесть значений дисперсий, измеренных в 10000 фунт/дюйм ^{2} , оказались равными: 16.1; 30.3; 36.4; 7.3; 40.6 и 39.5.

а) Можно ли сказать, что все шесть дисперсий одинаковы ?

б) Какие при этом необходимо сделать предположения ?

в) Считая дисперсии однородными, найдите 95%–ный доверительный интервал для предполагаемой величины общего значения дисперсии.

158. Температура в автоклаве регистрируется через равные промежутки времени. Для проведения некоторого эксперимента потребовалось поддерживать заданную температуру. Температура регистрировалась в течение двух последовательных дней в случайные моменты времени. В первый день было зафиксировано 16 значений температуры со средним квадратическим отклонением 15.6, а во второй день – 21 значение со средним квадратическим отклонением 9.8. Можно ли утверждать, что наблюдения относятся к одной совокупности ?

159. Пяти лабораториям было поручено участвовать в проведении химического анализа образцов каменного угля с целью определения содержания в них золы. Один образец был расколот на сорок частей, и в каждую из лабораторий отправили по восемь кусков. Дисперсии результатов измерений в разных лабораториях получились следующими: 3.86; 4.27; 1.35; 3.90 и 1.64. Можно ли отклонить гипотезу об однородности дисперсий ?

160. Одним из методов количественного анализа величины износа шины является измерение глубины проникновения щупа в канавку на рисунке протектора в определённом месте шины. Есть подозрение, что значительная часть дисперсии измерений связана с действиями контролёров. Чтобы выделить из общей дисперсии указанную часть, трёх контролёров попросили провести по 12 независимых измерений в одной и той же точке. Результаты измерений приведены ниже.

Контролёр X			Контролёр Y			Контролёр Зилч		
121	121	126	120	129	128	141	111	118
130	127	131	136	117	112	110	135	134
127	124	125	138	124	119	134	113	123
119	126	123	136	135	134	113	139	129

а) Однородны ли дисперсии измерений, проведённых разными контролёрами ?

б) Отличается ли дисперсия измерений, проведённых контролёром Зилчем, от дисперсий, которые имеют место при измерениях, проводимых контролёрами X и Y, если предположить, что измерения, проводимые двумя последними, характеризуются одинаковой дисперсией ?

в) Объясните различие между а) и б).

163. Исследовалась сила сцепления при комнатной температуре двух типов клейких веществ: изобутила 2-цианакрилата и MBR-4197. Приведённые ниже данные представляют собой значения силы сцепления. измеренные в фунтах/дюйм^2 для каждого из образцов:

Изобут.	MBR	Изобут.	MBR	Изобут.	MBR	Изобут.	MBR
365	518	146	419	222	461	227	477
169	403	163	437	121	437	250	498
210	473	213	396	205	402	218	330
297	329	300	424	283	346	202	352
228	457	218	363	134	571	234	495

а) Проверьте гипотезу о том, что выборки имеют одинаковые дисперсии.

б) Взяты ли эти выборки из совокупностей с одинаковыми средними значениями ?

в) Какие предположения были сделаны в пп. а) и б) ? Подтверждаются ли они ?

164. В рамках исследований, описанных в задаче 163, для дополнительной проверки было испытано ещё 20 образцов клейких веществ каждого типа. Клейкое вещество на каждый образец было нанесено за 24 часа до испытаний. Результаты приводятся ниже.

Изобут.	MBR	Изобут.	MBR	Изобут.	MBR	Изобут.	MBR
311	517	298	419	328	465	358	477
330	403	297	437	362	442	329	498
249	472	353	396	260	402	332	330
351	329	319	424	543	346	324	352

335	457	293	363	308	571	328	495

а) Можно ли утверждать, что выдержка существенно влияет на силу сцепления ?

б) Определите, что понимать под словами “существенно влияет”.

в) Определите по двум выборкам, есть ли различия в средней силе сцепления у сравниваемых веществ после выдержки.

165. Два оператора провели 14 независимых опытов по исследованию температуры воспламенения эмали одного состава. Каждый оператор проверил семь образцов. Ниже приведены результаты опытов.

Оператор A	1450	1425	1420	1410	1370	1360	1270
Оператор B	1430	1420	1380	1320	1320	1290	1280

а) Наблюдается ли значимое различие между средними значениями результатов, полученных разными операторами ?

б) Какая проверялась гипотеза, какие были сделаны предположения и принят уровень значимости ?

166. Для того чтобы определить, сокращается ли время сварки на отливках, если при литье вместо сырой формовочной смеси использовать сухую смесь или формовочную смесь с CO_2, было проведено специальное исследование. совершенно ясно, что стоимость литья в случае сухой формовочной смеси или смеси с CO_2 выше, но есть мнение, что это может быть оправдано, если стоимость сварки значимо уменьшится. Ниже приведены значения времени сварки в минутах при использовании формовочных смесей разных типов.

а) Можно ли сказать, что имеет место значимое уменьшение времени сварки, если предположить, что все факторы, кроме рассматриваемого, поддерживались на одном уровне ?

б) Какие нужно сделать добавочные предположения ?

Сырая смесь	19	28	14	29	15
Сухая смесь	21	15	11	12	21
Смесь с CO_2	14	20	15	19	17 .

ТЕМА 3: Критерий согласия Хи-квадрат и некоторые другие критерии.

Постановка задачи проверки гипотезы о виде распределения: дана с.в. ξ, в результате n измерений которой получена выборка x_1 ,..., x_n. Проверяется гипотеза $H : x_1 , ..., x_n$ имеет заданное распределение $F(x)$ (или $F(x, \theta_1 , ..., \theta_m)$, значения параметров $\theta_1 , ..., \theta_m$ неизвестны). Альтернативой ей служит $K : x_1 , ..., x_n$ имеет какое-то другое распределение $F_1(x)$. Для проверки H данные часто подвергаются группировке: область значений E (одномерной для простоты, хотя это легко распространить и на многомерные с.в.) с.в. ξ разбивается на интервалы группировки (бины) $E_1 , ..., E_j , ..., E_k$ так, чтобы $E_j \cap E_l = \varnothing$, $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_k = E$ - достоверному событию, и пусть в случае верности H вычислены вероятности $Pr\{\xi \in E_j \} = p_j$, r_j - число x_i из $x_1 , ..., x_n$, попавших в E_j , $j = 1, ...,$

k. С другой стороны, по выборке x_1 , ..., x_n подсчитаны частоты (число попаданий) r_j - число x_i из x_1 , ..., x_n ,попавших в E_j . По критерию К.Пирсона мерой расхождения между частотами r_j и их теоретическими (ожидаемыми, если верна H) значениями np_j служит статистика X^2, где

$$X^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(r_j - np_j)^2}{np_j} \ , \tag{18}$$

и если объём выборки n велик, то вычисленное по формуле (18) значение сравнивается с процентной точкой распределения χ^2_{k-1} : если $X^2 < \chi^2_{k-1,1-\alpha}$, то H принимается; в противном случае H отклоняется. Если рассматривается H с $F(x, \theta_1 , ..., \theta_m)$, значения параметров θ_1 , ..., θ_m неизвестны (*сложная гипотеза*), то если $X^2 < \chi^2_{k-1-m,1-\alpha}$, то H принимается; в противном случае H отклоняется (здесь X^2 вычисляется при подставленных значениях оценок параметров θ_1 , ..., θ_m , причём эти оценки вычисляются минимизацией (18) по θ_1 , ..., θ_m) .

В случае выборки с.в. ξ с распределением непрерывного типа (к числу которых относится и нормальное) критерий со статистикой (18) имеет низкую эффективность, и обычно рассматривают более мощные критерии, основанные на некоторой мере расхождения между гипотетической ф.р. $F(x)$ и эмпирической (построенной по выборке x_1 , ..., x_n) ф.р. $F_n(x)$, где, по определению, для (упорядоченной) выборки $x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)}$

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{(1)}; \\ i/n, \ \ x_{(i)} \le x < x_{(i+1)}, & i = 1,\ldots,n-1; \\ 1, & x_{(n)} \le x \end{cases} \tag{19}$$

В старейшем *критерии Колмогорова* разность ф.р. берётся в равномерной метрике, так что статистикой критерия является

$$D_n = \sup_{-\infty < x < +\infty} | F_n(x) - F(x) | . \tag{20}$$

В случае простой гипотезы вычисленное значение D_n сравнивается с процентными точками, найденными на основании асимптотических формул, и в этом случае критическое значения $D_{n,\alpha}$ не зависят от вида гипотетического распределения $F(x)$. Для этого случая есть таблицы процентных точек (в наших материалах это таблица Ф) и программы в статистических пакетах. С дальнейшими подробностями об этом критерии можно познакомиться в п. 8.9.3 книги [4].

В случае *сложной гипотезы* (ф.р. зависит от параметров, которые нужно оценить на основании выборочных значений x_1 , ..., x_n) критические значения $D_{n,\alpha} = d_{n,1-\alpha}$ зависят от вида гипотетического распределения и, вообще говоря, от неизвестных *истинных* значений параметров. Однако для некоторых частных распределений этот случай можно учесть внесением соответствующей поправки, Так, для нормального распределения уже при $n \approx 10$ можно получить хорошую точность для критических значений, используя формулу

$$d_{n,\,1-\alpha} \approx \frac{d''_{1-\alpha}}{\sqrt{n}-0.01+0.85/\sqrt{n}} \quad ,$$

где $d''_{0.90} = 0.819$; $d''_{0.95} = 0.895$; $d''_{0.99} = 1.035$.

Задачи

1. В Генеральный штаб прусской армии ежегодно в течение 20 лет поступали от 10 кавалерийских корпусов данные о количестве кавалеристов, погибших в результате гибели под ними коня (всего 200 донесений). Обозначим через x число людей, погибших в одном корпусе за год. Соответствующие частоты Rx даны в табл.

Количество погибших людей, x	0	1	2	3	4	5	6	Всего
Количество донесений Rx с указанием x погибших	109	65	22	3	1	0	0	200

Как эти данные согласуются с гипотезой о том, что число погибших подчиняется распределению Пуассона ? (Указание: так как ожидаемые частоты для x > 2 малы, нужно объединить последние 4 значения x в одну ячейку группировки).

51. Приведенные ниже данные получены из большой выборки, собранной на одном промышленном предприятии. Измерен диаметр шага резьбы металлического штифта. Приведены отклонения от заданного среднего, сгруппированные в интервалы длиной 0.0003 ед.

Используя критерий согласия Пирсона, исследуйте эти данные на нормальность.

X	f	X	f
от -0.0018 до -0.0015	3	от -0.0003 до -0.0000	178
от -0.0015 до -0.0012	11	от 0.0000 до 0.0003	147
от -0.0012 до -0.0009	32	от 0.0003 до 0.0006	91
от -0.0009 до -0.0006	89	от 0.0006 до 0.0009	43
от -0.0006 до -0.0003	149	от 0.0009 до 0.0012	12.

58. Резерфорд и Гейгер регистрировали число α-частиц, излучаемых диском в течение 2608 периодов по 7.5 сек. Здесь *r(i)* - число случаев (периодов) с *i* α-частицами; *n*p(i)* - математические ожидания *E{r(i)}* числа случаев, если предполагать закон распределения Пуассона. Получилась следующая таблица:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего 2608
r(i) n*p(i)	57 54. 399	203 210. 523	383 407. 361	525 525. 495	532 508. 418	408 393. 515	273 253. 817	139 140. 325	45 67. 882	27 29. 189	16 17. 075	2608 2608. 000

(а) На основании экспериментальных данных вычислить оценку параметра θ распределения Пуассона Ро(θ) и сравнить ожидаемые значения

$$n*p(i) = n*Pr\{X = i\} = n * exp\{-\theta\}*[(\theta)**i / i !]$$

с полученными Резерфордом и Гейгером.

(б) Проверить гипотезу Н: X имеет распределение Пуассона (с помощью критерия Пирсона Хи-квадрат).

62. При чтении шкалы некоторого прибора, где последняя цифра оценивается на глаз, наблюдатель часто предпочитает одни цифры другим. В следующей таблице даны частоты появления каждой цифры в последнем разряде для 200 выбранных случайным образом чтений шкалы, сделанных некоторым наблюдателем.

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота	35	16	15	17	17	19	11	16	30	24

Таблица показывает, что цифры 0 и 8 появляются несколько чаще, чем другие цифры. Не делает ли наблюдатель систематической ошибки ?

63. Генератор случайных чисел выдает независимые значения Х, целочисленной переменной в интервале 0, ..., 99. Наблюдаемые частоты попадания в отрезки [0, 19], [20, 39], [40, 59], [60, 79], [80, 99] оказались соответственно равными 9, 6, 12, 13 и 6. Применить критерий Хи-квадрат для проверки Н: $Pr\{ X = k \}$ = 0.01, k = 0, ..., 99. Уровень значимости α = 0.01.

64. При 8000 испытаний события А, В и С, составляющие полную группу, осуществились 2014, 5012 и 974 раз, соответственно. С помощью критерия Хи-квадрат уровня α = 0.05 проверить гипотезу : Pr{ A } = 0.5 - 2*a, Pr{ B } = 0.5 + a, Pr{ C } = a, где 0 < a < 0.25.

74. Пусть мы наблюдаем неотрицательную непрерывную с.в. Х. Её значения (округлённые до 0.01 и данные в порядке возрастания) для n = 50 испытаний суть 0.01, 0.01, 0.04, 0.17, 0.18, 0.22, 0.22, 0.25, 0.25, 0.29, 0.42, 0.46, 0.47, 0.47, 0.56, 0.59, 0.67, 0.68, 0.70, 0.72, 0.76, 0.78, 0.83, 0.85, 0.87, 0.93, 1.00, 1.01, 1.01, 1.02, 1.03, 1.06, 1.32, 1.34, 1.37, 1.47, 1.50, 1.52, 1.54, 1.59, 1.71, 1.90, 2.10, 2.35, 2.46, 2.46, 2.50, 3.73, 4.07, 6.03. Рабочая гипотеза Н состоит в том, что $Pr\{X <= x\} = F(x) = 1 - exp(-x), x>= 0$. Группируя данные в k = 4 равновероятных интервала (в предположении, что Н верна), проверьте это предположение по критерию Хи-квадрат при уровне значимости α = 0.1.

75. Число золотых песчинок Х в тонком слое взвеси регистрировалось под микроскопом в течение равных интервалов времени. Используя данные из таблицы:

Число частиц i	0	1	2	3	4	5	6	7	Всего
Число событий m(i)	112	168	130	68	32	5	1	1	Σ m(i) = 517

проверьте гипотезу Н: Х имеет распределение Ро(θ), где θ – неизвестный параметр.

126. Пусть вероятность появления “орла” при бросании монеты есть $p \in (0, 1)$. В эксперименте де Бюффона “орёл” выпал $k = 2048$ раз в $n = 4040$ бросаниях монеты. Нужно проверить, согласуются ли результаты этого опыта с гипотезой H_0, что монета симметричная. Использовать уровень значимости (а) 0.05; (б) 0.1.

127. В $n = 4000$ независимых испытаниях события A_1, A_2, A_3, которые составляют полную группу, произошли 1905, 1015, 1080 раз, соответственно. Выбрав уровень значимости 0.05, проверьте, согласуются ли эти данные с гипотезой $H_0 : p_1 = 1/2, p_2 = p_3 = 1/4$, где $p_i = P\{A_i\}$.

128. Проверяют 500 случайно выбранных в магазине часов. Пусть i – номер интервала между i–ым и $(i + 1)$–ым часом, $i = 0, ..., 11$, и пусть h_i – число часов, показывающих i–ый интервал. Результаты наблюдений сгруппированы в следующей таблице:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Всего
h_i	41	34	54	39	49	45	41	33	37	41	47	39	$n=500$

Проверяется гипотеза H_0, что время, показываемое часами, равномерно распределено на интервале (0, 12). Уровень значимости $\alpha = 0.1$. Верна ли H_0 ? Для какого α гипотеза H_0 принимается ?

129. Случайно выбираются числа 0, 1, ..., 9. В $n = 10000$ испытаний числа, не превосходящие 4, встретились $h = 5089$ раз. Проверить гипотезу H_0, что числа появляются равновероятно. Для какого уровня значимости следует отвергнуть H_0 ?

130. Число π, записанное в десятичном виде, содержит в первых 10002 позициях после запятой цифры 0, 1, ..., 9 соответственно 968, 1026, 1021, 974, 1014, 1046, 1021, 970, 948, 1014 раз. Можем ли мы считать для уровня значимости $\alpha = 0.05$ верной гипотезу H_0 о том, что эти цифры – случайные равновероятные ? Для какого уровня значимости следует отвергнуть H_0 ?

131. Эксперимент состоит в бросаниях двенадцати игральных костей. Наблюдаемая с.в. ξ равна числу костей, на которых выпало 4, 5 или 6 очков. Пусть h_i – число испытаний, в которых наблюдались значения $\xi = i$, $i = 0, 1, ..., 12$. Для $n = 4096$ испытаний получилась следующая таблица:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
h_i	0	7	60	198	430	731	948	847	536	257	71	11	0

Всего $n = 4096$.

Согласуются ли эти данные с гипотезой о том, что кость симметричная ?

132. Пусть в условиях предыдущей задачи с.в. η равна числу костей с шестью очками. Полученные результаты табулированы:

i	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7	Всего
h_i	447	1145	1181	796	380	115	24	8	$n=4096$

Теперь $H_0 : \eta \sim Bi(12, 1/6)$. Верна ли H_0 ?

133. В своей классической работе Мендель рассматривал частоты различных горошин, полученных при гибридизации желтых и сморщенных зелёных горошин. Эти данные и соответствующие вероятности, которые предсказывала теория наследственности Менделя, даны в следующей таблице:

Горошины	Частота	Вероятность
Круглая и жёлтая	**315**	**9/16**
Сморщенная и жёлтая	**101**	**3/16**
Круглая и зелёная	**108**	**3/16**
Сморщенная и зелёная	**32**	**1/16**
Всего	**n = 556**	**1**

Проверьте гипотезу H_0 , что частоты согласуются с теоретическими вероятностями (при уровне значимости $\alpha \leq 0.9$).

134. Приведённая ниже таблица даёт число m_i участков площадью 0.25 км ^{2} в южной части Лондона, каждый из которых подвергался бомбардировке i раз в течение II–й мировой войны. Проверьте гипотезу H_0 , что эти данные согласуются с законом распределения Пуассона на уровне значимости $\alpha = 0.05$.

i	0	1	2	3	4	≥ 5	Всего
m_i	229	211	93	35	7	1	576

135. Из 2020 семей с двумя детьми 527 семей имеют двух мальчиков, 476 семей – двух девочек, а оставшиеся 1017 семей – по мальчику и девочке. Дан уровень значимости $\alpha = 0.05$. Верна ли гипотеза, что число мальчиков в семьях с двумя детьми есть биномиальная с.в. ?

136. Среди 2000 пациентов в течение промежутка наблюдений 181 один раз болел гриппом, 9 – дважды, а остальные 1810 были здоровы. Согласуются ли эти данные с гипотезой H_0 о том, что число заболеваний у пациентов является биномиальной с.в. ? (Уровень значимости $\alpha = 0.05$).

141. Задан уровень значимости $\alpha = 0.001$. Рассматривается последовательность чисел 1.05, 1.12, 1.37, 1.50, 1.51, 1.73, 1.85, 1.98. Может ли она быть реализацией случайного вектора, все восемь компонент которого – независимые одинаково распределённые с.в. ?

142. Воспользуйтесь программой ERR1.EXE для генерации серии $n = 100$ равномерно распределённых случайных чисел. С помощью χ^2 –критерия (программа CHI_SQR.EXE) с $k = 5$ проверьте качество генератора случайных чисел (Бины разбиения одинаковы).

143. Примените критерий Колмогорова вместо χ^2–критерия в предыдущей задаче (программа KOLMOGOR.EXE).

144. Сделайте то же самое (т.е. исследование задач 142 и 143) для 100 нормально $N(0, 1)$ распределённых случайных чисел (программы ERR1.EXE и KOLMOGOR.EXE). <*Указание:* для χ^2 –критерия возьмите равновероятные интервалы разбиения. Для $k = 5$ эти интервалы суть: $(-\infty, -0.8416), (-0.8416, -0.25335), (-0.25335, +0.25335), (0.25335, 0.8416), (0.8416, +\infty)$.>

145. С помощью программы ERR1.EXE получите выборку объёма $n = 48$. Разбейте её на две совокупности $\{X_{2i}\}$, $i = 1, 2, ..., 24$ и $\{X_{2i+1}\}$, $i = 0, 1, ..., 23$ чётных и нечётных номеров. Пользуясь критерием Смирнова

$$\sup | F_{1,n}(z) - F_{2,m}(z)| ,$$

где $F_{1,n}(z)$ и $F_{2,m}(z)$ – эмпирические функции распределения для двух выборок $x_1, ..., x_n$ и $y_1, ..., y_m$ (в нашем случае $n = m$), проверьте гипотезу, что эти две выборки взяты из одного и того же распределения.

154. Анализ ранних произведений Жозефа Зайлича показал, что предложения, включающие разное число слов, распределены в них следующим образом:

Число слов	**2-3**	**4-5**	**6-8**	**9-12**	**13-16**	**17-20**	**21-24**	**25-28**	**Свыше 28**
Доля предложений	0.010	0.034	0.067	0.091	0.210	0.174	0.181	0.143	0.09

Джо Зилч, наследник автора, заявил о находке рукописи ранее не опубликованного произведения своего предка. В выборке, состоящей из 2000 предложений, было обнаружено следующее распределение фраз по длине :

Число слов	**2-3**	**4-5**	**6-8**	**9-12**	**13-16**	**17-20**	**21-24**	**25-28**	**Свыше 28**
Доля предложений	15	51	118	227	476	401	352	239	121

Проверьте, могут ли эти данные подтвердить заявление Джо Зилча.

162. На одном крупном газовом месторождении фирма за последние 10 лет пробурила 75 скважин. Ниже приведены данные о распределении запасов газа на скважину в единицах 10^9 фут^3.

x	f	x	f
0 – 1.999	30	10 – 11.999	1
2 – 3.999	15	12 – 13.999	2
4 – 5.999	11	14 – 15.999	1
6 – 7.999	9	16 – 17.999	2
8 – 9.999	3	....	
		26 – 27.999	1

Подберите по этим данным экспоненциальное распределение

$$p_X(x) = \theta e^{-\theta x} \quad (0 \le x < \infty),$$

оценивая θ как $(\overline{X})^{-1}$, вычислите теоретические частоты. Используя критерий согласия, исследуйте эти данные.

ТЕМА 4: Некоторые дополнительные критерии
(выявление аномальных наблюдений; проверка гипотез о параметрах биномиального распределения и распределения Пуассона; проверка независимости и однородности данных; сравнение математических ожиданий нескольких выборок)

В этом итоговом занятии рассматриваются дополнительные задачи и соответствующие критерии проверки статистических гипотез. Многие из них вы найдёте в теоретическом обосновании данного практикума, так что не будем повторяться. Некоторые другие вводятся и объясняются здесь.

Хотя в предыдущей теме рассматривается в первую очередь проверка гипотез о функции распределения выборки и соответствующие критерии согласия, уместно рассмотреть некоторые другие задачи со статистикой X^2 и статистикой Колмогорова. Первая часто рассматривается для проверки независимости двух признаков, не измеряемых в непрерывной шкале значений. Результаты измерений двух признаков указанного типа для каждого из N исследуемых объектов можно представить в виде *таблицы сопряжённости признаков*. Строка i соответствует i-му уровню одного из признаков, а j-ый столбец – j-му уровню другого признака. Величина N_{ij} на пересечении i-ой строки и j-го столбца есть число объектов (из N), для которых первый признак находится на i-ом уровне, а второй на j-ом. Предположим, что матрица содержит r строк и c столбцов, причём $i = 1, 2, ..., r;$ $j = 1, 2, ..., c$.

Для оценивания доли объектов из некоторой совокупности, у которых первый признак находится на i-ом уровне, будем использовать отношение $N_{i\,.}/N$, где $N_{i\,.} = \sum_j N_{i\,j}$. Аналогично, доля объектов, у которых второй признак находится на уровне j, оценивается отношением $N_{.j} / N$, где $N_{.j} = \sum_i N_{i\,j}$.

Предположим, что два признака взаимно независимы (для объектов совокупности); тогда естественной оценкой доли объектов, принадлежащих i-ому уровню по первому признаку и j-ому по второму, будет величина $(N_{i\,.}/N)\,(N_{.j} / N)$. Таким образом, оценка среднего значения частоты в выборке объёма N равна $N(N_{i\,.}/N)\,(N_{.j}/ N)$. Следовательно, имеется rc наблюдаемых частот N_{ij} и rc теоретических частот $N_{i\,.}\, N_{.j}/ N$. Теперь можно вычислить

$X^2 = \sum$ (Наблюдаемая частота – Теоретическая частота)^2 / Теоретическая частота =

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\left[N_{ij}-\frac{N_i.N._j}{N}\right]^2\left(\frac{N_i.N._j}{N}\right)^{-1} = N\cdot\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\left[\frac{N_{ij}^{\ 2}}{N_i.N._j}-1\right]. \qquad (21)$$

Если признаки независимы, то $X^2 \sim \chi^2_{(r-1)\cdot(c-1)}$. Получение значимо большого X^2 рассматривается как очевидное свидетельство отсутствия независимости.

Этот же критерий используется для проверки *однородности* данных, имеющих дискретную структуру или сводимых к этому группировкой. Он применим для сравнения любого числа выборок. Пусть осуществлено c серий независимых наблюдений, и в каждой серии наблюдался некий переменный признак, принимающий одно из r возможных значений (исходов). Пусть N_{ij} – число реализаций i-ого исхода в j-ой серии ($\sum_{i=1}^{r} N_{i\,j} = N_{.j} = n_j$, $J = 1, ..., c$).

Требуется проверить гипотезу H_0 о том, что все наблюдения производились над одной и той же с.в. Статистикой критерия служит (21), причём в данном случае $N = n_1 + ... n_k$. Критическую область задают в виде $X^2 \geq \chi^2_{(r-1)\cdot(c-1),\ 1-\alpha}$, и критическое значение определяют по таблицам (программам) функции, обратной к распределению χ^2. Вероятность ошибочно отклонить при этом истинную гипотезу приблизительно равна α, если N достаточно велико.

В задаче проверки однородности в частном случае двух выборок (задачу о двух выборках) можно использовать и статистику Колмогорова. Пусть x_1 , ..., x_n и y_1 , ..., y_m – две независимые выборки , которые описывают некоторый процесс или явление, но, вообще говоря, получены при различных условиях. Мы должны определить, являются ли эти две выборки двумя сериями измерений над одной и той же с.в., или же закон распределения изменился от выборки к выборке, т.е. гипотеза однородности H_0 заключается в том, что функции распределения выборок совпадают, $F_1(z) = F_2(z)$. В критерии Смирнова для проверки H_0 используется статистика

$$D_{nm} = \sup_{-\infty < z < +\infty} | F_{1n}(z) - F_{2m}(z) | , \tag{22}$$

где $F_{1n}(z)$ и $F_{2m}(z)$ – эмпирические функции распределения для выборок x_1 , ..., x_n и y_1 , ..., y_m . Критическая область для критерия (22) может быть найдена из неравенства

$$\sqrt{\frac{nm}{n+m}} \cdot D_{nm} \geq t_\alpha , \tag{23}$$

где t_α – решение уравнения $K(t_\alpha) = 1 - \alpha$, а $K(t)$ – предельная функция распределения для статистики Колмогорова (20). В табл. 2 Приложения 2 приводятся вероятности для статистики (23) в частном случае выборок одинакового объёма, $n = m$.

Задачи

39. Измерялось сопротивление проволок пяти типов. Утверждается, что между сопротивлениями проволок разных типов в среднем нет различий. Результаты проверки сопротивлений проволок каждого типа в шести выборках приведены ниже.

Проволока

A	B	C	D	E
0.126	0.121	0.121	0.129	0.128
0.131	0.121	0.119	0.132	0.135
0.126	0.124	0.126	0.136	0.134
0.127	0.122	0.128	0.139	0.129
0.124	0.120	0.126	0.130	0.135
0.130	0.124	0.124	0.132	0.132
0.128	0.125	0.122	0.137	0.134
0.124	0.120	0.127	0.136	0.126

а) Можно ли принять гипотезу Н об одинаковом значении среднего сопротивления для проволок шести типов ?

б) Если принимают гипотезу Н, то что это значит ?

40. Проверьте по данным, приведённым в упражнении 39, гипотезу об однородности дисперсий. Определите 95 %-ный доверительный интервал для общего значения сопротивления, если принята нулевая гипотеза.

45. В одной из общин 92 % жителей получили соматическую вакцину, а в другой общине только 87 %. Численность общин оставляет 1200 и 1520 жителей. Можно ли говорить о том, что в одной из общин вакцинация проходит более активно, чем в другой ?

47. Ожидается, что число дефектных шин среди изготовляемых заводом А должно составлять 3 шины в неделю. В течение последних 20 недель было обнаружено 47 дефектных шин. Можно ли сказать, что наблюдается значимое снижение уровня брака ?

49. Измеряется сопротивление проволоки. При исследовании 8-ми образцов получены следующие результаты:

0.129; 0.132; 0.136; 0.139; 0.132; 0.137; 0.125 и 0.136.

а) Есть ли достаточные основания для того, чтобы исключить из выборки одно или несколько значений ?

б) Какие предположения были сделаны при исследовании статистического критерия ?

50. Для 10-ти выборок, каждая из которых включала по 6 образцов виниловых стержней, было проведено измерение удлинений этих стержней. Ниже приведены средние значения удлинений в процентах (%) для каждой из выборок:

781, 726, 719, 735, 742, 722, 730, 728, 742 и 736.

Можно ли классифицировать некоторые из приведенных средних значений как выбросы, если используется $\alpha = 0.05$?

52. При работе специального счетчика в некоторых заданных условиях среднее число отсчетов в течение одной мин. составило m0 = 4.0. За 10-минутный интервал было зарегистрировано X0 = 31 отсчетов. Можно ли считать этот результат совместимым с ожидаемым ? Предположим, что нас устраивает ситуация, когда мы с 5 %-ной вероятностью совершаем ошибку, делая вывод о несовместимости выборки и совокупности, когда на самом деле они совместимы.

53. По записям строительной фирмы число несчастных случаев за период в несколько лет составляло в среднем 1.5 в месяц. В течение последнего года зарегистрировано 25 несчастных случаев. Хотелось бы выяснить, превосходит ли зарегистрированное число несчастных случаев то их количество, которое можно было бы ожидать. Размер критерия $\alpha = 0.05$.

59. В таблице приведены данные об уровнях холестерина в крови (X) и отношениях вес/рост (Y, фунт/дюйм) для 10 человек, прошедших обследование в кардиологическом центре.

X	254	240	279	284	315	250	298	384	310	337
Y	2.71	2.96	2.62	2.19	2.68	2.64	2.37	2.61	2.12	1.94

Предположим, что пары (X, Y), помещенные в табл., являются реализациями независимых двумерных векторов с совместным нормальным распределением $N_2(\kappa; \eta, \sigma^2, \tau^2, \rho)$. Можно ли, применяя критерий

$$t = r \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

с правилом отклонения гипотезы некоррелированности $|t| >= t_{n-2,1-\alpha/2}$, где r – коэффициент выборочной корреляции, α – уровень значимости (положить $\alpha = 0.1$), заключить, что уровень холестерина в крови коррелирован с отношением рост/вес ?

60. За первый день счетчик зарегистрировал 20026 импульсов пуассоновского процесса, за второй день – 19580. Есть ли основания считать, что за второй день интенсивность поступления импульсов снизилась ? Уровень значимости $\alpha = 0.05$.

61. За первый час счетчик зарегистрировал 150 импульсов пуассоновского процесса, а за последующие 2 часа – 250 импульсов. Была ли одинаковой интенсивность поступления импульсов в единицу времени ? Уровень значимости $\alpha = 0.05$.

78. Пластмассовые контейнеры должны обладать определённой прочностью. При исследовании 100 образцов контейнеров было обнаружено, что два из них не удовлетворяют критерию прочности. Что можно сказать относительно вероятности (1 - p) того, что выбранный случайным образом контейнер будет удовлетворять требованиям прочности ? Известно, что МП-оценка для $p = X/n$, где n – число дефектных изделий. Предположим, что требуется проверить гипотезу о равенстве доли дефектных изделий величине $p0 = 0.01$, т.е. гипотеза Н: $p = p0$ (= 0.01), где p – истинная доля дефектных изделий в совокупности, из которой взята выборка, а $p0$ – ее предполагаемое значение. Гипотеза Н: $p = 0.01$ проверяется при $\alpha = 0.05$ с помощью двустороннего критерия. Сравните результаты, вычисленные из функции вероятностей биномиального распределения, с полученными по аппроксимации нормальным распределением.

79. На каждом из двух имеющихся на заводе станков производят новые изделия одного типа. При пробном пуске из 350 изделий, изготовленных на станке А, при проверке по принципу “годен - не годен”, 15 оказались дефектными. Среди 320 изделий, изготовленных для сравнения на станке В, оказалось всего 8 дефектных. Можно ли, приняв уровень значимости равным $\alpha = 0.05$, ожидать, что в продукции, производимой на сравниваемых станках, окажется одинаковая доля дефектных изделий ?

80. / Парные наблюдения/ Данные получены на испытаниях шин. В табл. приведены результаты исследования температуры, до которой нагревается шина при движении рейсового автобуса. Приведенные цифры - результаты испытания левых и правых передних шин 19 автобусов. Рассмотрены три варианта нагрузки на каждую шину - один при движении по поверхности с частыми и острыми ребрами и два при движении по более мелким неровностям. При этом замечено, что при движении по поверхности с частыми ребрами шины нагреваются до более высокой температуры. В приведённой таблице представлены наблюдения, полученные при движении автобусов по поверхности с частыми ребрами.

Левая передняя (ЛП)	Правая передняя (ПП)	D = ПП - ЛП	ЛП	ПП	D = ПП - ЛП
36	27	-9	41	60	19
42	45	3	40	34	-6
55	84	29	100	117	17
59	84	25	58	78	20
79	70	-9	38	56	18
108	99	-9	73	85	12
79	84	5	89	65	-24
41	77	36	58	72	14
36	56	20	60	85	25
47	86	39			

На основании данной таблицы нужно проверить гипотезу H о равенстве температур правой и левой передних шин. Уровень значимости $\alpha = 0.05$.

81. На сталелитейном заводе возникли подозрения относительно постоянства содержания марганца в одной из марок выпускаемой стали. В течение восьми недель производилось по 10 отливок в неделю (при разной температуре ковшей). Ниже приведены результаты исследований этих отливок. Приведенные цифры показывают процентное содержание марганца в каждой отливке.

Номер выборки	1	2	3	4	5	6	7	8
	1.20	**1.39**	**1.18**	**1.22**	**1.21**	**1.30**	**1.33**	**1.13**
	1.17	**1.31**	**1.17**	**1.15**	**1.24**	**1.35**	**1.35**	**1.11**
	1.15	**1.29**	**1.08**	**1.17**	**1.19**	**1.25**	**1.27**	**1.20**
	1.21	**1.28**	**1.15**	**1.22**	**1.17**	**1.26**	**1.30**	**1.12**
	1.14	**1.30**	**1.18**	**1.26**	**1.15**	**1.23**	**1.24**	**1.13**
	1.17	**1.28**	**1.09**	**1.27**	**1.18**	**1.24**	**1.30**	**1.08**
	1.18	**1.34**	**1.06**	**1.19**	**1.17**	**1.26**	**1.27**	**1.15**
	1.21	**1.32**	**1.08**	**1.22**	**1.17**	**1.33**	**1.29**	**1.17**
	1.25	**1.30**	**1.15**	**1.20**	**1.25**	**1.28**	**1.34**	**1.11**
	1.14	**1.35**	**1.06**	**1.15**	**1.18**	**1.24**	**1.28**	**1.16**
Средние значения	**1.182**	**1.316**	**1.120**	**1.205**	**1.191**	**1.274**	**1.297**	**1.136**
Дисперсия $\cdot 10^4$	**12.6222**	**12.2667**	**25.3333**	**17.1666**	**10.5444**	**16.4889**	**12.011**	**12.044**

Необходимо решить, можно ли при уровне значимости $\alpha = 0.05$ считать, что отливки относятся к совокупностям с одним и тем же средним значением, т.е. H : $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_8$. Предполагается, что выборки взяты из нормально распределенных совокупностей с неизвестной общей дисперсией. (Подсказка : см. табл. И).

83. При восьмикратном исследовании стального бруска на разрыв получено среднее значение предела прочности $\bar{x} = 62$ кг/(мм)**2, причём среднеквадратическое отклонение $s = 1.3$. Минимальное значение $x_6 = 58.6$ вызывает сомнение. Проверить гипотезу о том, что x_6 – выброс.

124. Предполагается, что применение новой технологии в производстве микросхем приведёт к увеличению выхода годной продукции. Результаты контроля двух партий продукции, изготовленных по старой и новой технологии, приведены ниже.

изделия	Технология	
	старая	**новая**
годные	**140**	**185**
негодные	**10**	**15**
Всего	**150**	**200**

Подтверждают ли эти результаты предположение об увеличении выхода готовой продукции ? Принять $\alpha = 0.01$.

137. Поступающие в университет разбиты на две группы по 300 человек в каждой группе. В первой группе 33, 43, 80, 144 человека получили оценки “2”, “3”, “4”, “5”, соответственно. Данные для второй группы – 39, 35, 72, 154 человека, соответственно. Можем ли мы рассматривать обе группы однородными на уровне значимости $\alpha = 0.05$?

138. Таблица

n_j	1072	1133	2455	1195
ν_j	22	23	49	33

даёт данные по числу смертей матерей, имеющих своего первого ребёнка, в четыре периода времени (n_j – число матерей, ν_j – число смертей). Проверьте гипотезу о том, что вероятность смерти в эти периоды одна и та же.

139. Проверьте гипотезу независимости для следующей двумерной таблицы сопряжённости признаков:

		ξ_2			
		b_1	b_2	b_3	Σ
ξ_1	a_1	3009	2832	3008	8849
	a_2	3047	3051	2997	9095
	a_3	2974	3038	3018	9030
	Σ	9030	8921	9023	26974

Уровень значимости $\alpha = 0.05$.

140. Из 300 поступающих в университет, которые выдержали вступительный экзамен, 97 получили “5” в школе, 48 получили “5” на вступительном экзамене, но только 18 получили “5” как в школе, так и на экзамене. Проверьте гипотезу H_0 о том, что школьные отметки и результаты экзамена в университете независимы (уровень значимости $\alpha = 0.1$).

145. С помощью программы ERR_EST1 получите выборку объёма n = 200. Разбейте её на две совокупности $\{X_{2i}\}$, $i = 1, 2, ..., 100$ и $\{X_{2i+1}\}$, $i = 0, 1, ..., 99$ чётных и нечётных номеров. При помощи критерия Смирнова

$$\sup | F_{1,n}(z) - F_{2,m}(z)| ,$$

где $F_{1,n}(z)$ и $F_{2,m}(z)$ – эмпирические функции распределения для двух выборок $x_1, ..., x_n$ и $y_1, ..., y_m$ (в нашем случае $n = m$) проверьте гипотезу, что эти две выборки взяты из одного и того же распределения.

148. Табачная фирма хотела бы знать, можно ли отправлять заказчикам сигареты и трубочный табак в одной упаковке. Если при этом качество сигарет или трубочного табака не ухудшится, то можно существенно сократить затраты по перевозке. Признаком ухудшения качества сигарет является изменение их аромата (возможно, из-за сильного запаха трубочного табака). Для проведения исследований изготовили 400 картонных коробок и в 250 из них положили табачные изделия обоих типов. В оставшиеся 150 коробок были положены только сигареты. Через месяц коробки открыли, и все 400 упаковок сигарет расположили в случайном порядке. Несколько экспертов анализировали аромат сигарет и пытались обнаружить его отличие от (предполагаемого) исходного. Результаты экспертизы приведены в таблице.

Можно ли сказать, что связь между ароматом сигарет и видом упаковки отсутствует ?

Мнение об аромате	**Вид упаковки**		**Всего**
	Совместная	**Раздельная**	
Не изменился	72	119	191
Изменился	178	31	209
Всего	250	150	400

161. Проверьте, есть ли выбросы в результатах измерений контролёра Зилча, приведённых в задаче 160 (см. задачи к теме 2). Используйте $\alpha = 0.05$.

167. Проверить независимость между (1) умственными способностями школьников и (2) качеством их одежды. Классифицированы 1725 школьников. Для первого признака были использованы следующие градации: A - умственно отсталый, B - медлительный и тупой, C - тупой, D - медлительный, но умный, E - достаточно умный, F - явно способный, G - очень способный.

Способности /Как одевается	**A и B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**Сумма**
Очень хорошо	33	48	113	209	194	39	636
Хорошо	41	100	202	255	138	15	751
Сносно	39	58	70	61	33	4	265
Очень плохо	17	13	22	10	10	1	73
Сумма	130	219	407	535	375	59	1725

168. В следующей таблице приведены результаты экспериментов по иммунизации крупного рогатого скота против туберкулёза.

Проверить, подтверждается ли гипотеза о независимости между вакцинацией и восприимчивостью к туберкулёзу (уровень значимости $\alpha = 0.1$).

	Число погибших или серьёзно пострадавших от туберкулёза	**Число легко пострадавших или не пострадавших**	**Сумма**
Привитые вакциной	6	13	19
Не привитые или привитые контрольными средствами	8	3	11
Сумма	14	16	30

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. “Физический практикум. Механика и молекулярная физика” // Под ред. В.И.Ивероновой. М.: Наука. 1967

2. Гришин В.К., Живописцев Ф.А., Иванов В.А. Математическая обработка и интерпретация физического эксперимента. М.: изд. МГУ. 1988

3. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир. 1975

4. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: Методы обработки данных. М.: Мир. 1980

5. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М.: Наука. 1965

Приложение 1. *Краткое описание программ*

В алфавитом порядке описаны программы для выполнения заданий на компьютере. Для наглядности работы программ те запросы, которые делает программа в процессе её запуска, и комментарии по форме выдачи результата, по дальнейшим возможностям использования программы, подчёркиваются , а *курсивом* набираются ответы пользователя. Разъяснения автора печатаются в "угловых" скобках < >.

BINOM.EXE - Программа вычисляет функцию вероятностей p(k) биномиального распределения Bi(N, EPS), где N > 0 - число испытаний, 0. <= EPS <= 1. - вероятность

Число значений N = *8*

Вероятность удачи 0 <= EPS <=1. EPS = *0.5*

Результаты хранятся в файле BINOM.DAT

CHISQR.EXE – Программа вычисления статистики Пирсона Хи-квадрат.

До её запуска Вы должны заполнить файлы

FREQ.DAT (наблюдавшиеся частоты попадания в бины) и

PROB.DAT (гипотетические вероятности).

ВНИМАНИЕ ! Соответствие числа бинов разбиения и количества чисел в файлах программа не контролирует – это Ваши заботы !

Введите количество наблюдений N (N > 0). N --> *50*

Число интервалов (бинов) разбиения K (K > 0). K --> *5*

<Для контроля правильности ввода данных и предварительного сравнения ожидаемых и выборочных частот печатается таблица вида

	Частота	Вероятность	Ожидаемая частота
J = 1	H(J) = .5E+1	P(J) = 0.12000E+0	F(J)= 0.600000E+01
J = 2	H(J) = .9E+1	P(J) = 0.16000E+0	F(J)= 0.800000E+01 , и т.д.>

Данные введены верно ? ("Да" - нажать 1, "Нет" - нажать 0). *1*

Значение статистики критерия Хи-квадрат равно *4.87*

ERF.EXE - Вычисляется вероятность для стандартного нормального распределения, т.е. p = F(x), где x – вещественный аргумент, а F(x) = P{z <= x} – соответствующая функция распределения с.в. z. В данном случае z ~ N(0, 1).

Введите аргумент x = *2.*

Значение функции erf(x) равно p = 0.97725.

Продолжать ? (1 - "ДА", 0 - "НЕТ") *0*

ERFI.EXE - Вычисляется процентная точка стандартного нормального распределения, т.е. решение уравнения F(x) = p, p - заданная вероятность (0 <= p <= 1), F(x) = P{ z <= x } - соответствующая функция распределения с.в. z

Введите вероятность P = *0.67*

Функция, обратная к ERF(x) = P, равна x = *0.44*

Продолжать ? (ДА - 1, НЕТ - 0) *0*

ERR_EST.EXE - Вычисление среднего значения и ошибок данных для совокупности N измерений, истинное значение величины равно 0

Количество точек (N > 63). N = *67*

Затравочное число для генератора случайных чисел (0 < ISEED < 30000 , целое, нечётное). ISEED = *67*

Результат равен D =

IERR = 0

AVE = , SIGMA = , SUM = , VAR =

pause *<Enter>*

<Далее выдаются 64 числа – результат умножения первых 64-х случайных чисел на матрицу Гилберта: $\vec{y} = H^{*} \cdot \vec{x}$ >.

IERR = 0

AVE = , SIGMA = , SUM = , VAR =

Результаты работы ГСЧ – "выборочные значения" - хранятся в файле SAMPLE.DAT.

Pause

IERR = 0

AVE = , SIGMA = , SUM = , VAR =

Результаты работы ГСЧ – "выборочные значения" с систематической ошибкой 0.1 - хранятся в файле SAMPLES.DAT.

Pause

ERR_EST1.EXE - Генерация 200 данных для стандартного равномерного распределения. Они упорядочены по возрастанию и записаны в файл SAMPLE.DAT.

Для исследования корреляций между соседними (по времени получения) величинами они разбиты на две совокупности одинакового объёма, записанные в файлы S1.DAT и S2.DAT.

Затравочное число для генератора случайных чисел (0 < ISEED < 30000 , целое, нечётное). ISEED = *67*

Результаты работы ГСЧ – "выборочные значения" - хранятся в файле SAMPLE.DAT.

Результаты работы – подвыборки S1 и S2 объёма 100 – хранятся в файлах S1.DAT и S2.DAT.

Pause

ERR1.EXE - Генерация N данных для стандартного равномерного распределения (IND = 0) или стандартного нормального распределения (.IND = 1). Они упорядочены по возрастанию и записаны в файл SAMPLE.DAT.

Для исследования корреляций между соседними (по времени наблюдения) величинами берётся число N = 48. Все наблюдения разбиты на две совокупности одинакового объёма, записанные в файл S12.DAT.

Какую задачу Вы будете решать: сравнение двух совокупностей данных (для заданного N = 48, а количество данных в каждой совокупности равно N/2 = 24) или же проверку согласия данных с предполагаемым законом распределения для выборки объёма N =

100 ?
Итак, N = 48 или N = 100. Ваш выбор задачи -- N = *48*
Какое распределение генерировать: равномерное (IND = 0) или нормальное (IND = 1) ? IND = 0 *1*
Затравочное число для генератора случайных чисел
(0 < ISEED < 30000 , целое, нечётное). ISEED = *13*
Максимум абсолютного значения разности равен
diff[i] = | s1[i] - s2[i] |
равен max = 0.181818
Результаты работы – подвыборки S1 и S2 объёма 24 – хранятся в файле S12.DAT.
Введите какую-то цифру 0, 1, 2, …, 9. i = *7*

< Это аналог для языка С оператора Pause ФОРТРАНа, чтобы дать возможность посмотреть и переписать в тетрадь результаты до выхода в DOS >

GNORM.EXE – Генерация 100 данных для стандартного нормального распределения. Они упорядочены по возрастанию.
Для исследования расхождения между теоретической и эмпирической ф.р. вычисляется интеграл ошибок в точках упорядоченной выборки. Результаты записаны в файлы SAMPLE.DAT и S2.DAT.
Затравочное число для генератора случайных чисел
(0 < ISEED < 30000 , целое, нечётное). ISEED = *67*
Результаты работы ГСЧ – "выборочные значения" - хранятся в файле SAMPLE.DAT.
Результаты работы – функция распределения F(x) в точках x1, ..., x100 - хранится в файле S2.DAT.

ICHI.EXE - Вычисляется процентная точка Хи-квадрат распределения с DF степенями свободы, т.е. решение уравнения F(x) = p, p - заданная вероятность (0 <= p <= 1), F(x) = P{ z <= x } - соответствующая функция распределения с.в. z
Задайте число степеней свободы (DF > 0). DF = *4*
Задайте вероятность (0 < P < 1). P = *0.90*
Результат равен x = *7.779443*
Продолжить с тем же числом степеней свободы ? (1 - "да", 0 - "нет"). *0*
Продолжить с другим числом степеней свободы ? (1 - "да", 0 - "нет"). *0*
Pause

KOLMOGOR.EXE – Применяется критерий Колмогорова для выборки объёма *N = 100* , чтобы проверить качество генерации случайных чисел, распределённых либо по стандартному равномерному закону R(1/2, 1), либо по стандартному нормальному закону N(0, 1).
Моделировать стандартное равномерное (IND = 0) или стандартное нормальное (IND = 1) распределение ? IND = *0*
Введите затравочное число для генератора случайных чисел

(натуральное, 0 < ISEED < 30000, нечётное). ISEED = *45*
Максимальная разность эмпирической функции распределения (ф.р.) EDF и теоретической ф.р. TDF = *0.123149*
Результаты работы: упорядоченная выборка 100 чисел, значения эмпирической (EDF) и теоретической (TDF) ф.р. и их разность в каждой выборочной точке x1, …, x100 – находятся в файле KOLM.DAT
Введите какую-то цифру 0, 1, 2, …, 9. i = *7*

< Это аналог для языка С оператора Pause ФОРТРАНа, чтобы дать возможность посмотреть и переписать в тетрадь результаты до выхода в DOS >

INT_POIS.EXE – Программа вычисляет функцию f(x)=1 - F(x), дополнительную к (интегральной) функции распределения Пуассона с параметром LAMBDA, т.е. сумму ряда по i от i = x до бесконечности членов exp{ - LAMBDA} * (LAMBDA**i)/ i !

< т.е. $f(x) = \sum_{i=x}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$ >

Параметр LAMBDA >0. LAMBDA => *0.2*
Номер x => *4*
LAMBDA = *0.20000* X= *4* Сумма = *.5684E-04*
Попробовать при ещё одном X ? (Y / N) *N*
Вычислить сумму при другом LAMBDA ? (Y / N) *N*

MULNORM.EXE - Программа MULNORM.FOR предназначена для одновременного показа до пяти функций плотности вероятностей нормального распределения при различных значениях параметров математического ожидания MEAN и стандартного отклонения SIGMA.
Введите требуемое число кривых (от 1 до 5). K = *2*
Номер кривой равен J = 1
Задайте параметр среднего значения нормального распределения (-10 <= MEAN <= +10). MEAN = *0.0*
Задайте стандартное отклонение нормального распределения (SIGMA > 0; SIGMA <= 10). SIGMA = *1.0*
Номер кривой равен J = 2
Задайте параметр среднего значения нормального распределения (-10 <= MEAN <= +10). MEAN = *1.0*
Задайте стандартное отклонение нормального распределения (SIGMA > 0; SIGMA <= 10). SIGMA = *2.0*
Результат хранится в файле MULNORM.DAT.

POISSON.EXE - Программа вычисляет функцию вероятностей p(k) распределения Пуассона Po(LAMBDA) с пуассоновским параметром LAMBDA для значений k = 0, 1, ..., N-1
Число значений N = *10*
Параметр LAMBDA > 0. LAMBDA = *0.5*
Результаты хранятся в файле POISSON.DAT.

Pause

SNEDECOR.EXE - Вычисляется процентная точка распределения Снедекора с DF1, DF2 степенями свободы, т.е. решение уравнения F(x) = p, p - заданная вероятность (0 <= p <= 1), F(x) = P{ z <= x } - соответствующая функция распределения с.в. z

Введите число степеней свободы DF1, DF2 > 0. DF1 DF2 -> *2 4*
Введите вероятность (0 < P < 1). P = *0.90*
IERR = 0
Результат равен x = *4.324556*
Продолжить с тем же числом степеней свободы ? (1 -"да", 0 - "нет") *0*
Продолжить вычисления с другим числом степеней свободы ? (1 -"да", 0 - "нет") *0*

T1.EXE - Запись выборки данных в файл и чтение записанных данных из файла. Вычисление простейших выборочных характеристик: AVE - среднего, SUM - суммы квадратов отклонений от среднего, VAR - выборочной дисперсии, SIGMA - среднего квадратического отклонения. В случае размера выборки N = 1 две последние не вычисляются.

Если Вы хотите ввести новые данные, не забудьте сперва уничтожить существующий файл SAMPLE.DAT (клавиша <F8>), а потом набирайте строку за строкой.
Задайте объём выборки N (N > 1) N --> *10*
MM = -1
I = 1. Введите значение для D(I) =
I = 2. Введите значение для D(I) =
< и т.д., до заданного N. После конца ввода или после прочтения уже существующего файла SAMPLE.DAT печатаются вычисленные характеристики>
AVE = , SIGMA = , SUM = , VAR =

TSTUD.EXE - Вычисляется процентная точка распределения Стьюдента с DF степенями свободы, т.е. решение уравнения F(x) = p, p - заданная вероятность (0 <= p <= 1), F(x) = P{ z <= x } - соответствующая функция распределения с.в. z

Задайте число степеней свободы (DF > 0). DF = *4*
Задайте вероятность (0 < P < 1). P = *0.90*
Результат равен x = *1.533206*
Продолжать с тем же числом степеней свободы ? (1 - "да", 0 - "нет"). *0*
Продолжить вычисления с другим числом степеней свободы ? (1 - "да", 0 -"нет"). *0*
Pause

Приложение 2. *Статистические таблицы*

Таблица 1 **0. 95% - доверительные интервалы (p_1, p_2) для параметра p биномиального распределения**

$P\{ p_1 < p < p_2) = 0.95$.

Источник: Г.И.Ивченко, Ю.И.Медведев, А.В.Чистяков “Сборник задач по математической статистике”. М.: Высшая школа. 1989.

k\ n - k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	-	0.98	0.84	0.71	0.60	0.52	0.46	0.41	0.37	0.34	0.31	0.29	0.27
	-	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	1.00	0.99	0.91	0.81	0.72	0.64	0.58	0.53	0.48	0.45	0.41	0.39	0.36
	0.03	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	1.00	0.99	0.93	0.85	0.78	0.71	0.65	0.60	0.56	0.52	0.48	0.45	0.43
	0.16	0.09	0.07	0.05	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02
3	1.00	0.99	0.95	0.88	0.82	0.76	0.70	0.65	0.61	0.57	0.54	0.51	0.48
	0.29	0.19	0.15	0.12	0.10	0.09	0.08	0.07	0.06	0.06	0.05	0.05	0.04
4	1.00	1.00	0.96	0.90	0.84	0.79	0.74	0.69	0.65	0.61	0.58	0.55	0.52
	0.40	0.29	0.22	0.18	0.16	0.14	0.12	0.11	0.10	0.09	0.08	0.08	0.07
5	1.00	1.00	0.96	0.92	0.86	0.81	0.77	0.72	0.68	0.65	0.62	0.59	0.56
	0.48	0.36	0.29	0.25	0.21	0.19	0.17	0.15	0.14	0.13	0.12	0.11	0.10
6	1.00	1.00	0.97	0.93	0.88	0.83	0.79	0.75	0.71	0.68	0.65	0.52	0.49
	0.54	0.42	0.35	0.30	0.26`	0.23	0.21	0.19	0.18	0.16	0.15	0.14	0.13
7	1.00	1.00	0.97	0.93	0.89	0.85	0.81	0.77	0.73	0.70	0.67	0.64	0.62
	0.59	0.47	0.40	0.35	0.31	0.28	0.25	0.23	0.21	0.20	0.18	0.17	0.16
8	1.00	1.00	0.98	0.94	0.90	0.86	0.82	0.79	0.75	0.72	0.69	0.67	0.64
	0.63	0.52	0.44	0.39	0.35	0.32	0.29	0.27	0.25	0.23	0.22	0.20	0.19
9	1.00	1.00	0.98	0.95	0.91	0.87	0.84	0.80	0.77	0.74	0.71	0.69	0.66
	0.66	0.56	0.48	0.43	0.39	0.35	0.32	0.30	0.28	0.26	0.24	0.23	0.22
10	1.00	1.00	0.98	0.95	0.92	0.88	0.85	0.82	0.79	0.76	0.73	0.70	0.68
	0.69	0.59	0.52	0.46	0.42	0.38	0.35	0.33	0.31	0.29	0.27	0.26	0.24
11	1.00	1.00	0.98	0.95	0.92	0.89	0.86	0.83	0.80	0.77	0.74	0.72	0.69
	0.72	0.62	0.57	0.49	0.45	0.41	0.38	0.36	0.34	0.32	0.30	0.28	0.27
12	1.00	1.00	0.98	0.96	0.93	0.90	0.87	0.84	0.81	0.78	0.76	0.73	0.71
	0.74	0.64	0.57	0.52	0.48	0.44	0.41	0.38	0.36	0.34	0.32	0.31	0.29

Замечание: значения p_2 находятся в первой строке, о значения p_1 – во второй строке каждой ячейки таблицы.

Таблица Б. **Распределение Пуассона**. Значения функции $\sum_{k=x}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \cdot e^{-\theta} = 1 - F(x)$.

Источник: Г.И.Ивченко, Ю.И.Медведев, А.В.Чистяков “Сборник задач по математической статистике”

x \ θ	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1	0.095	0.181	0.259	0.330	0.394	0.451
2	0.005	0.018	0.037	0.062	0.90	0.122
3		0.001	0.003	0.008	0.014	0.023
4				0.001	0.002	0.003

x \ θ	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1	0.503	0.551	0.593	0.632	0.865	0.950
2	0.156	0.191	0.228	0.264	0.594	0.801
3	0.034	0.047	0.063	0.080	0.323	0.577
4	0.006	0.009	0.014	0.019	0.143	0.353
5	0.001	0.001	0.002	0.004	0.053	0.185
6				0.001	0.018	0.084
7					0.005	0.034
8					0.001	0.012

x \ θ	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1	0.982	0.993	0.998	0.999	1.000	1.000
2	0.908	0.960	0.983	0.994	0.997	0.999
3	0.762	0.875	0.938	0.970	0.986	0.994
4	0.567	0.735	0.849	0.918	0.958	0.979
5	0.371	0.560	0.715	0.827	0.900	0.945
6	0.215	0.384	0.554	0.699	0.809	0.884
7	0.111	0.238	0.394	0.550	0.687	0.793
8	0.051	0.138	0.256	0.401	0.547	0.676
9	0.021	0.068	0.153	0.271	0.408	0.544
10	0.008	0.032	0.084	0.170	0.283	0.413
11	0.003	0.014	0.043	0.099	0.184	0.294
12	0.001	0.005	0.020	0.053	0.112	0.197
13		0.002	0.008	0.027	0.068	0.124
14		0.001	0.004	0.013	0.034	0.074
15			0.001	0.006	0.017	0.042
16			0.001	0.002	0.008	0.022
17				0.001	0.004	0.011
18					0.002	0.005
19					0.001	0.002
20						0.001

Таблица И.

Процентные точки стьюдентизированного размаха. Величины $q_{k,\,\nu,\,1-\alpha}$ таковы, что $1 - \alpha = \int_0^{q_{k,\nu,1-\alpha}} p(q)dq$ (q определено как w / S). Размах выборки объема k из нормальной совокупности, делённый на независимую оценку среднего квадратического отклонения совокупности, основанную на ν степенях свободы, превышает приведённые в таблице значения с вероятностью α.

Источник: Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: Методы обработки данных. М.: Мир. 1980

	$\alpha = 0.05$										
ν \ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	17.97	26.98	32.82	37.08	40.41	43.12	45.40	47.36	49.07	50.59	51.96
2	6.08	8.33	9.80	10.88	11.74	12.44	13.03	13.54	13.99	14.39	14.75
3	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32
6	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.51	5.61
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17	5.27
20	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20
30	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	4.92	5.00
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81

Продолжение таблицы И

	$\alpha = 0.01$										
ν \ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	90.03	134.0	164.3	185.6	202.2	215.8	227.2	237.0	245.6	253.2	260.0
2	14.04	19.02	22.29	24.72	26.63	28.20	29.53	30.68	31.69	32.59	33.40
3	8.26	10.62	12.17	13.33	14.24	15.00	15.64	16.20	16.69	17.13	17.53
4	6.51	8.12	9.17	9.96	10.58	11.10	11.55	11.93	12.27	12.57	12.84
5	5.70	6.98	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	10.48	10.70
6	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.31	8.61	8.87	9.10	9.30	9.48
8	4.75	5.64	6.20	6.62	6.96	7.24	7.47	7.68	7.86	8.03	8.18
10	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36	7.49
12	4.32	5.05	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94	7.06
14	4.21	4.89	5.32	5.64	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66	6.77
16	4.13	4.79	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46	6.56
18	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31	6.41
20	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19	6.28
30	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	5.85	5.93
60	3.76	4.28	4.59	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53	5.60

Таблица К. **Критические значения для проверки выбросов**.
Источник: Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: Методы обработки данных. М.: Мир. 1980

Статистика	**Число средних** n	**Критические значения для одностороннего критерия** * α = 0.05	α = 0.01
$r_{10} = \dfrac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}$	3	0.941	0.988
	4	0.765	0.889
	5	0.642	0.780
	6	0.560	0.698
	7	0.507	0.637
$r_{11} = \dfrac{x_2 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$	8	0.554	0.683
	9	0.512	0.635
	10	0.477	0.597
$r_{21} = \dfrac{x_3 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$	11	0.576	0.679
	12	0.546	0.642
	13	0.521	0.615
$r_{22} = \dfrac{x_3 - x_1}{x_{n-2} - x_1}$	14	0.546	0.641
	15	0.525	0.616
	16	0.507	0.595
	17	0.490	0.577
	18	0.475	0.561
	19	0.462	0.547
	20	0.450	0.535
	21	0.440	0.524
	22	0.430	0.514
	23	0.421	0.505
	24	0.413	0.497
	25	0.406	0.489
	26	0.399	0.486
	27	0.393	0.475
	28	0.387	0.469
	29	0.381	0.463
	30	0.376	0.457

*** Для двустороннего критерия эти процентные точки для α = 0.10 и α = 0.20**

Таблица М.

Доверительные зоны для среднего значения распределения Пуассона.

Общее число наблюдаемых событий $x_0 = \Sigma x_i$	Уровень значимости			
	$\alpha = 0.01$		$\alpha = 0.05$	
	Нижняя граница	Верхняя граница	Нижняя граница	Верхняя граница
0	0.0	5.3	0.0	3.7
1	0.0	7.4	0.1	5.6
2	0.1	9.3	0.2	7.2
3	0.3	11.0	0.6	8.8
4	0.6	12.6	1.0	10.2
5	1.0	14.1	1.6	11.7
6	1.5	15.6	2.2	13.1
7	2.0	17.1	2.8	14.4
8	2.5	18.5	3.4	15.8
9	3.1	20.0	4.0	17.1
10	3.7	21.5	4.7	18.4
11	4.3	22.6	5.4	19.7
12	4.9	24.0	6.2	21.0
13	5.5	25.4	6.9	22.3
14	6.2	26.7	7.7	23.5
15	6.8	28.1	8.4	24.8
16	7.5	29.4	9.4	26.0
17	8.2	30.7	9.9	27.2
18	8.9	32.0	10.7	28.4
19	9.6	33.3	11.5	29.6
20	10.3	34.6	12.2	30.8
21	11.0	35.9	13.0	32.0
22	11.8	37.2	13.8	33.2
23	12.5	38.4	14.6	34.4
24	13.2	39.7	15.4	35.6
25	14.0	41.0	16.2	36.8
26	14.7	42.2	17.0	38.0
27	15.4	43.5	17.8	39.2
28	16.2	44.8	18.6	40.4
29	17.0	46.0	19.4	41.6
30	17.7	47.2	20.2	42.8
31	18.5	48.4	21.0	44.0
32	19.3	49.6	21.8	45.1
33	20.0	50.8	22.7	46.3
34	20.8	52.1	23.5	47.5
35	21.6	53.3	24.3	48.7

Продолжение таблицы М.

36	22.4	54.5	25.1	49.8
37	23.2	55.7	26.0	51.0
38	24.0	56.9	26.8	52.2
39	24.8	58.1	27.7	53.3
40	25.6	59.3	28.6	54.5
41	26.4	60.5	29.4	55.6
42	27.2	61.7	30.3	56.8
43	28.0	62.9	31.1	57.9
44	28.8	64.1	32.0	59.0
45	29.6	65.3	32.8	60.2
46	30.4	66.5	33.6	61.3
47	31.2	67.7	34.5	62.5
48	32.0	68.9	35.3	63.6
49	32.8	70.1	36.1	64.8
50	33.6	71.3	37.0	65.9

Замечание: Если Σ **x**$_i$ – суммарное число появления события при n независимых наблюдениях пуассоновской величины со средним значением θ, то значение $n\theta$ с вероятностью, не меньшей $1 - \alpha$, окажется между нижней и верхней границами.

Таблица Ф.

Критерий Колмогорова.

$$Pr\{ \max_x | F_n^*(x) - F(x)| < d_{1-\alpha}(n)\} = 1 - \alpha \text{ для } n \text{ от 1 до 100},$$

$$\alpha = 0.10,\ 0.05,\ 0.01.$$

$n \setminus p$	0.10	0.05	0.01	$n \setminus p$	0.10	0.05	0.01
1	0.950	0.975	0.995	19	0.271	0.301	0.361
2	0.776	0.842	0.929	20	0.265	0.294	0.352
3	0.636	0.708	0.829	25	0.238	0.264	0.317
4	0.565	0.624	0.734	30	0.218	0.242	0.290
5	0.509	0.563	0.669	35	0.202	0.224	0.269
6	0.468	0.519	0.617	40	0.189	0.210	0.252
7	0.436	0.483	0.576	45	0.179	0.198	0.238
8	0.410	0.454	0.542	50	0.170	0.188	0.226
9	0.387	0.430	0.513	55	0.162	0.180	0.216
10	0.369	0.409	0.489	60	0.155	0.172	0.207
11	0.352	0.391	0.468	65	0.149	0.166	0.199
12	0.338	0.375	0.449	70	0.144	0.160	0.192
13	0.325	0.361	0.432	75	0.139	0.154	0.185
14	0.314	0.349	0.418	80	0.135	0.150	0.179
15	0.304	0.338	0.404	85	0.131	0.145	0.174
16	0.295	0.327	0.392	90	0.127	0.141	0.169
17	0.286	0.318	0.381	95	0.124	0.137	0.165
18	0.279	0.309	0.371	100	0.121	0.134	0.161

Табл. 2. **Критерий Смирнова.**

Вероятности $P\{D_{nn} \le k/n\}$, где $D_{nn} = \sup_x |F_{1n}(x) - F_{2n}(x)|$

Источник: Г.И.Ивченко, Ю.И.Медведев, А.В.Чистяков “Сборник задач по математической статистике”. М.: Высшая школа. 1989.

n \ *k*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1.000										
2	0.667	1.000									
3	0.400	0.900	1.000								
4	0.229	0.771	0.971	1.000							
5	0.127	0.643	0.921	0.992	1.000						
6	0.069	0.526	0.857	0.974	0.998	1.000					
7	0.037	0.425	0.788	0.947	0.992	0.999	1.000				
8	0.020	0.340	0.717	0.913	0.981	0.998	1.000	1.000			
9	0.011	0.270	0.648	0.874	0.966	0.993	0.999	1.000	1.000		
10	0.006	0.213	0.582	0.832	0.948	0.988	0.998	1.000	1.000	1.000	
11	0.003	0.167	0.521	0.789	0.925	0.979	0.996	0.999	1.000	1.000	1.000
12	0.002	0.131	0.464	0.744	0.900	0.969	0.992	0.999	1.000	1.000	1.000
13	0.001	0.102	0.412	0.700	0.874	0.956	0.987	0.997	1.000	1.000	1.000
14	0.000	0.079	0.365	0.657	0.845	0.941	0.981	0.995	0.999	1.000	1.000
15	0.000	0.062	0.322	0.614	0.816	0.925	0.974	0.992	0.998	1.000	1.000
16	0.000	0.048	0.284	0.574	0.785	0.907	0.965	0.989	0.997	1.000	1.000
17	0.000	0.037	0.249	0.535	0.755	0.888	0.955	0.984	0.995	0.999	0.999
18	0.000	0.028	0.219	0.497	0.725	0.868	0.944	0.979	0.993	0.998	0.999
19	0.000	0.022	0.192	0.462	0.694	0.847	0.932	0.973	0.991	0.997	0.999
20	0.000	0.017	0.168	0.429	0.664	0.825	0.919	0.966	0.988	0.996	0.999
21	0.000	0.013	0.147	0.397	0.635	0.804	0.905	0.959	0.984	0.995	0.998
22	0.000	0.010	0.128	0.368	0.606	0.782	0.891	0.951	0.980	0.993	0.998
23	0.000	0.008	0.112	0.340	0.578	0.759	0.876	0.942	0.975	0.991	0.997
24	0.000	0.006	0.098	0.314	0.551	0.737	0.860	0.932	0.970	0.988	0.996

Табл. 3. **Критические значения статистики *D* (максимального стьюдентизированного абсолютного отклонения) для выявления выбросов** (источник : Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. М.: Наука. 1968)

n	Уровни значимости α			
	0.10	0.05	0.025	0.01
3	1.41	1.41	1.41	1.41
4	1.65	1.69	1.71	1.72
5	1.79	1.87	1.92	1.96
6	1.89	2.00	2.07	2.13
7	1.97	2.09	2.18	2.27
8	2.04	2.17	2.27	2.37
9	2.10	2.24	2.35	2.46
10	2.15	2.29	2.41	2.54
11	2.19	2.34	2.47	2.61
12	2.23	2.39	2.52	2.66
13	2.26	2.43	2.56	2.71
14	2.30	2.46	2.60	2.76
15	2.33	2.49	2.64	2.80

ОГЛАВЛЕНИЕ