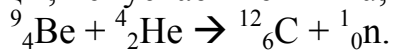


## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 21

### ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МЕДЛЕННЫХ НЕЙТРОНОВ В ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СРЕДЕ

Нейтроны в свободном состоянии образуются в результате ядерных реакций при взаимодействии с ядрами быстрых заряженных частиц или фотонов большой энергии, а также при делении атомных ядер. Источниками нейтронов поэтому могут быть ускорители, ядерные реакторы и препараты, в которых используются быстрые  $\alpha$ -частицы естественных радиоактивных элементов / 1,2 /. Примером последних может служить Pu- $\alpha$ -Be нейтронный источник, в котором  $\alpha$ -частицы, испускаемые  $^{239}\text{Pu}$ , взаимодействуют с ядрами



Энергетический спектр такого нейтронного источника показан на рис.1. Все упомянутые выше источники испускают нейтроны, обладающие довольно высокой кинетической энергией порядка  $1-10$  МэВ. Такие нейтроны называются **быстрыми**.

Если источник окружен более или менее плотной средой (твердой или жидкой), то движущийся в ней нейтрон испытывает столкновения с ядрами атомов среды (средний свободный пробег между двумя актами взаимодействия составляет по порядку величины  $1$  см). Взаимодействие нейтрона с ядром может привести либо к поглощению нейтрона, либо к его рассеянию. Рассеяние нейтрона может быть упругим и неупругим.

При неупругом рассеянии происходит возбуждение ядра, с которым произошло столкновение нейтрона; часть кинетической энергии нейтрона превращается во внутреннюю энергию ядра-мишени

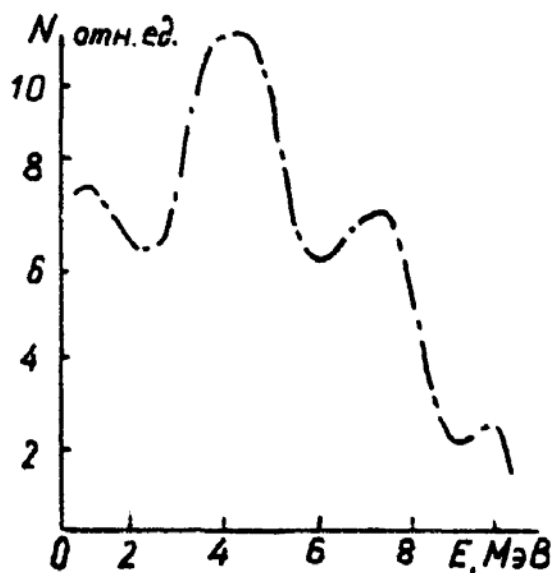


Рис.1. Энергетический спектр нейтронов Pu- $\alpha$ -Be источника  $T_{1/2}=24.36 \cdot 10^2$  лет.

При упругом рассеянии кинетическая энергия нейтрона переходит (частично или полностью) в кинетическую энергию ядра-мишени, возбуждения последнего не происходит. Отметим, что неупругое рассеяние могут испытывать лишь нейтроны сравнительно высоких энергий от  $0,1-1$  МэВ и выше (в зависимости от структуры уровней энергии ядер рассеивающей среды).

Упругое рассеяние возможно для нейтронов любых энергий. Процесс упругого рассеяния можно трактовать по законам классической механики, основываясь на принципах сохранения импульса и энергии. В результате рассеяния энергия быстрого нейтрона уменьшается.

Замедление нейтронов играет важную роль в работе большинства ядерных реакторов [1]. Вещества, применяемые для этой цели, называются **замедлителями**. В хороших замедлителях скорость быстрых нейтронов существенно уменьшается в результате небольшого числа столкновений. Так как основным процессом, приводящим к потере энергии нейтроном, является **упругое рассеяние**, а энергия, переданная нейтроном ядру с массовым числом в одном акте рассеяния, выражается соотношением

$$E_A = \frac{4A}{(A+1)^2} E_n \cos^2 \varphi$$

где  $\varphi$ - угол между направлением скорости нейтрона до рассеяния и скорости ядра отдачи, то, очевидно, хороший замедлитель должен состоять из атомов с малыми массовыми числами. В частности, наибольшая передача кинетической энергии происходит при рассеянии на ядрах водорода. Поэтому в качестве замедлителей в различных реакторах применяются: обыкновенная вода (и другие водородосодержащие вещества), тяжелая вода, бериллий, углерод (графит). Их основные свойства приведены в табл. 1.

Перейдем теперь к вопросу о том, каково пространственное распределение нейтронов вокруг точечного моноэнергетического источника нейтронов, находящегося в замедляющей среде, и как оно зависит от энергии замедляющихся нейтронов. Очевидно, что нейтроны с энергией равной энергии, с которой они вылетают из источника, можно найти лишь в непосредственной близости от источника, а именно, на расстоянии порядка длины свободного пробега между столкновениями. Нейтроны, имеющие энергию  $E_1 < E_2$ , испытавшие  $n_1$  соударений с ядрами замедлителя, распределены в более широкой области вокруг источника по сравнению с нейтронами энергии  $E_0$ .

Таблица I

Элемент	Массовое число	Максимальная доля энергии теряемой нейтроном при соударении	Средняя доля теряемой энергии	Число соударений, замедляющих нейтрон от энергии 5 МэВ до тепловой энергии
Водород	1	1,00	0,50	1,00
Дейтерий	2	0,38	0,44	0,38
Бериллий	9	0,36	0,18	0,36
Углерод	12	0,28	0,14	0,28

Еще более широкую область локализации имеют нейтроны с энергией  $E_2 < E_1$ , испытавшие  $n_2 > n_1$  соударений и т.д. Качественно картина пространственного распределения нейтронов различных энергий вокруг

точечного источника имеет вид, изображенный на рис.2. Очевидно, что если в среде отсутствует поглощение, то полное число нейтронов каждой энергии должно оставаться постоянным. В результате этого площади, ограничиваемые всеми кривыми на рис.2, равны между собой. Для нейтронов больших энергий вероятность поглощения мала, так что пренебрежение поглощением нейтронов в процессе замедления не является грубым приближением. Однако по мере замедления нейтронов вероятность поглощения растет и когда энергия нейтронов становится близкой к энергии теплового движения атомов среда (тепловые нейтроны), поглощение начинает играть решающую роль (см. ниже). В количественной теории замедления, так называемой теории непрерывного замедления (теории возраста) Э.Ферми, дискретные потери энергии нейтронами в актах рассеяния заменяют непрерывными потерями. Такое приближение справедливо только для замедлителей, состоящих из элементов с довольно большими массовыми числами, и неприменимо к средам, содержащим водород и дейтерий. Теория возраста дает следующее выражение для пространственного распределения плотности нейтронов с данной энергией вокруг точечного источника:

$$n(r) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(r-r_0)^2}{4\tau}\right] \quad (1)$$

Это распределение Гаусса с центром в точке источника  $r_0$

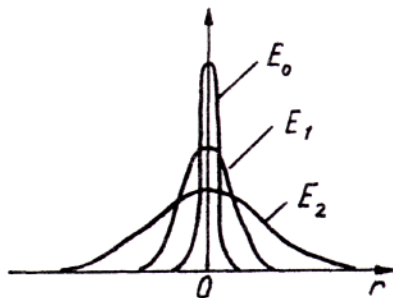


Рис.2. Пространственное распределение замедляющихся нейтронов

Ширина распределения определяется величиной  $\tau$  - **возрастом нейтронов**. Возраст нейтронов является очень важной характеристикой замедлителя. Он определяется через средний квадрат удаления (расстояние по прямой) нейтрона от источника до рассматриваемой точки, а именно:

$$\tau = 1/6 \langle r_1^2 \rangle \quad (2)$$

Возраст нейтронов по мере замедления растет. Если нейтроны замедлились незначительно, большинство из них обладает большими энергиями и находится вблизи от источника, то среднее значение квадрата удаления мало, возраст мал, что соответствует высокой и узкой кривой распределения на рис.2. Напротив, если нейтроны испытали существенное замедление, и значительная часть их успела удалиться на заметное расстояние от источника, то значение возраста велико, кривая распределения плотности нейтронов оказывается низкой и широкой. Значение возраста для нейтронов, замедлившихся до тепловых энергий, называется **полным возрастом**.

Величина полного возраста различна для разных замедлителей. В самом деле, если замедлитель хороший, т.е. для замедления нейтронов от начальной энергии до тепловой требуется небольшое количество соударений с ядрами

замедлителя, то средний квадрат удаления нейтронов от источника будет малым и полный возраст также малым. И наоборот, когда для замедления нейтрон должен испытать большое число соударений, он удалится на большое расстояние от источника, полный возраст в том случае будет большим. В табл. 2 приведены значения полного возраста нейтронов деления ( $\langle E_0 \rangle \approx 2$  МэВ) для некоторых замедлителей.

Таблица 2

Замедлитель	Возраст, см <sup>2</sup>	Длина диффузии, см	Время замедления, с	Время диффузии, с
Вода	33	2,9	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-4}$
Тяжелая вода	120	100	$4,6 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$
Бериллий	98	24	$6,7 \cdot 10^{-5}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$
Графит	350	50	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$

Отметим, что данные для первых двух из перечисленных веществ в действительности не представляют собой значений возраста, поскольку к ним неприменима теория непрерывного замедления. В этих случаях величина, физически эквивалентная возрасту, определяется на основе экспериментально измеренного значения среднего квадрата удаления от точечного источника нейтронов, имеющих энергию непосредственно вблизи тепловой энергии, с помощью выражения (2).

Если сравнить пространственное распределение нейтронов с одной и той же энергией от одного и того же источника в разных замедлителях (например, в воде и графите), то получим картину, качественно сходную с изображенной на рис.3.

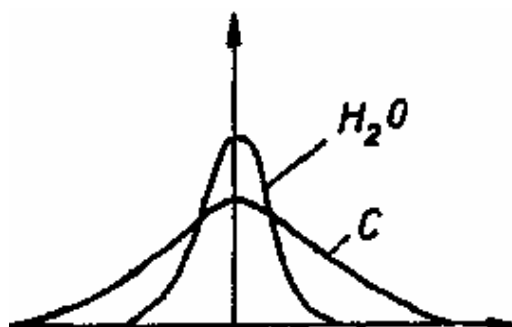


Рис. 3. Пространственное распределение нейтронов одной энергии в разных замедлителях

Замедление нейтронов прекращается, когда их энергия становится сравнимой с энергией теплового движения атомов среды. Так как атомы имеют определенное распределение по скорости там (распределение Максвелла), то нейтрон может в отдельном столкновении с ядром как потерять, так и приобрести энергию. Но в среднем, при рассмотрении большого числа актов рассеяния, изменения энергии нейтрона не происходит. Перемещение теплового нейтрона в рассеивающей среде называется **диффузией**. Как отмечалось выше, вероятность поглощения нейтрона ядрами среды увеличивается с уменьшением его энергии. Поэтому, если основным параметром среды, определяющим замедление

нейтрона, является массовое число ядер, то для процесса диффузии теплового нейтрона наиболее важна характеристика поглощающих свойств среды - эффективное сечение поглощения. Если сечение поглощения тепловых нейтронов велико, то в процессе диффузии нейтрон испытывает лишь небольшое число столкновений с ядрами до момента поглощения. Если же сечение поглощения мало, число актов рассеяния до момента поглощения будет значительным. В первом случае нейтрон в процессе диффузии не сможет удалиться на большое расстояние от той точки, где он стал тепловым. Пространственное распределение тепловых нейтронов близко к распределению надтепловых; область локализации тепловых нейтронов ненамного шире локализации надтепловых нейтронов. Во втором случае, когда сечение мало, нейтрон удаляется на значительное расстояние от точки, где он стал тепловым, область, занимаемая тепловыми нейтронами, существенно превышает область локализации надтепловых нейтронов. Общее число тепловых нейтронов, находящихся в среде с постоянно действующим источником нейтронов, определяется равновесием между процессом замедления нейтронов до тепловых энергий и процессом поглощения тепловых нейтронов. Если одинаковые источники нейтронов находятся в средах с близкими замедляющими свойствами, но отличающихся сечением поглощения тепловых нейтронов, то равновесное количество тепловых нейтронов будет выше в той среде, где меньше поглощение. Качественная иллюстрация пространственного распределения тепловых нейтронов в замедлителях, обладающих близкими замедляющими, но различными поглощающими свойствами, приведена на рис. 4. Примером таких замедлителей являются дистиллированная вода и раствор  $NaCl$  в воде, используемые в данной задаче.

Количественной характеристикой процесса диффузии тепловых нейтронов является **длина диффузии**. Квадрат длины диффузии связан со средним квадратом удаления (по прямой) нейтрона от точки, где он стал тепловым, до точки, где он поглотился:

$$L^2 = 1/6 \langle r^2 \rangle \quad (3)$$

Из сказанного выше ясно, что в среде с сильным поглощением длина диффузии мала, в среде со слабым поглощением - велика.

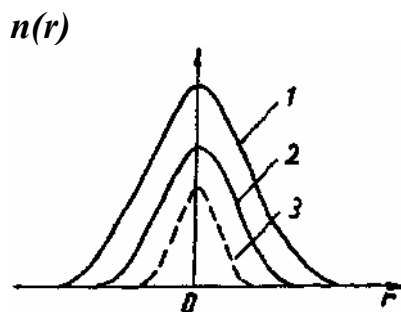


Рис. 4. Пространственное распределение тепловых нейтронов в средах с различным поглощением: 1 - тепловые нейтроны в среде со слабым поглощением; 2 - тепловые нейтроны в среде с сильным поглощением; 3 - надтепловые нейтроны

В табл.2 приведены значения длины диффузии для ряда замедлителей. Надо отметить, что даже незначительное загрязнение замедлителя примесями, имеющими большое сечение поглощения для тепловых нейтронов, резко уменьшает длину диффузии. Поэтому в реакторостроении очень актуальной является проблема чистоты замедлителя.

Наконец, обратим внимание на следующее обстоятельство. Как известно,

свободный нейтрон является нестабильной частицей: его среднее время жизни  $\sim 12$  минут. Однако, если движение нейтрона происходит в плотной рассеивающей среде, он поглощается ядрами среды через промежуток времени несравненно более короткий, чем его среднее время жизни по отношению к распаду. Это видно из табл. 2, где приведены значения времени замедления и времени диффузии нейтронов деления для некоторых замедлителей.

## § 2. Цель работы и экспериментальная методика

В настоящей работе изучается пространственное распределение надтепловых и тепловых нейтронов в двух замедляющих средах: дистиллированной воде и растворе поваренной соли в воде. Добавление  $NaCl$  в воду практически не влияет на процесс замедления нейтронов, но существенно изменяет поглощающие свойства среды по отношению к тепловым нейтронам, так как хлор обладает сравнительно большим сечением поглощения.

Экспериментальная установка состоит из двух ванн, одна наполнена водой, другая - раствором  $NaCl$ . В центре каждой ванны на определенной глубине находится  $Pu-\alpha-Be$ -источник нейтронов. Для измерения плотности нейтронов применяется **активационный детектор**. В данной задаче им служит родий. На рис.5 изображена зависимость сечения поглощения нейтронов родиём от энергии

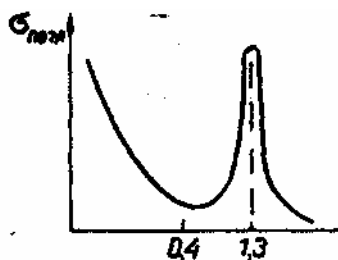


Рис.5. Зависимость сечения поглощения нейтронов родиём от кинетической энергии нейтронов

Видно, что сечение имеет большую величину, во-первых, в области тепловых энергий, и, во-вторых, в окрестности  $1,3$  эВ, где наблюдается резонансный пик. Именно эти две группы нейтронов, **тепловые** и **резонансные**, в основном наводят искусственную радиоактивность в пластинке родия, когда она помещается в ванну. Чтобы выделить активность, наведенную одной из этих групп нейтронов, применяется **кадмиевый фильтр**. Благодаря мощному резонансу в тепловой области энергий кадмий интенсивно поглощает нейтроны с энергией меньше  $\sim 0,4$  эВ, но практически совсем не поглощает нейтроны с энергией больше  $0,4$  эВ. Так что если родиевую пластинку заэкранировать с обеих сторон пластинками кадмия, она будет активироваться лишь резонансными нейтронами. В то же время разность активностей родия, облученного без кадмиевого экрана и с экраном, представляет активность, наведенную только тепловыми нейтронами.

Пространственное распределение плотности нейтронов измеряется путем помещения активационного детектора на различных расстояниях от источника нейтронов и последующего счета продуктов радиоактивного распада ( $\beta$ -частиц). Если время облучения детектора, время переноса его к счетной установке и время счета  $\beta$ -частиц выдерживать постоянным, то, измеряя активность детектора, можно определить плотность нейтронов на различных расстояниях от источника

(в относительных единицах).

Заметим, что резонансные нейтроны ( $E_n = 1,3 \text{ эВ}$ ) в случае родиевого детектора - это надтепловые нейтроны, прошедшие практически весь энергетический интервал замедления от начальной энергии до тепловой. Их пространственное распределение с достаточной степенью точности может использоваться для определения полного возраста нейтронов в водородосодержащем замедлителе:

$$\tau = \frac{1}{6} \langle r_1^2 \rangle = \frac{1}{6} \frac{\int_0^{\infty} r^2 J_p(r) 4\pi r^2 dr}{\int_0^{\infty} J_p(r) 4\pi r^2 dr} \quad (4)$$

Интегрирование в (4) должно производиться по всему пространству замедлителя, где плотность резонансных нейтронов  $J_p(r)$  отлична от нуля. В то же время "практически она может быть измерена только в ограниченной области. Однако, как показывает опыт, распределение плотности нейтронов на больших расстояниях от источника можно определить достаточно точно путем экстраполяции. Дело в том, что на больших расстояниях от точечного источника быстрых нейтронов (в воде при  $r > 10-15 \text{ см}$ ) распределение резонансных (надтепловых) нейтронов имеет быть аппроксимировано выражением:

$$J_p(r) \sim \exp[-kr] / r^2. \quad (5)$$

Поэтому измерения необходимо проводить до такого расстояния от источника, которое достаточно для определения постоянной затухания  $k$ , т.е. углового коэффициента линейной функции  $f(r) = \ln ( J_p(r) r^2 )$ . Строя в полулогарифмическом масштабе кривую  $r^2 J_p(r)$  и экстраполируя ее линейный участок, получим зависимость  $J_p(r)$  для всех значений  $r$ . Далее в линейном масштабе строят кривые  $r^4 J_p(r)$  и  $r^2 J_p(r)$ , интегрируют их графически в пределах от  $r=0$  до  $r=\infty$  и согласно формуле (4) вычисляют значение возраста нейтронов.

Измерение пространственного распределения тепловых нейтронов в чистой воде и в водном растворе какого-либо вещества, обладающего большим сечением поглощения тепловых нейтронов, чем вода, является удобным методом определения величины этого сечения поглощения. В настоящей работе таким методом измеряется сечение поглощения хлора. Метод основан на следующих соображениях. Как было отмечено выше, полное число тепловых нейтронов в ванне с раствором  $NaCl$  меньше, чем в ванне с чистой водой. Зная пространственное распределение плотности тепловых нейтронов (пропорциональной активности детектора, наведенной тепловыми нейтронами), можно найти полное число тепловых нейтронов в ванне:

$$N = k \int_0^a J_T(r) r^2 dr \quad (6)$$

где  $J_T(r)$  - активность детектора,  $a$  - радиус области локализации тепловых нейтронов. С другой стороны,

$$N = Q t \quad (7)$$

где  $Q$  - мощность нейтронного источника,  $t$  - среднее время жизни теплового нейтрона в данной среде. Далее,

$$t = \frac{\lambda}{v} = \frac{1}{\sigma n v} \quad (8)$$

где  $\lambda$  - средний пробег теплового нейтрона до поглощения,  $v$  - средняя скорость тепловых нейтронов,  $\sigma$  - сечение поглощения,  $n$  - число ядер поглотителя в  $1 \text{ см}^3$ . Для чистой воды имеем

$$N_0 = \frac{Q_0}{\sigma_0 n_0 v_0} \quad (9)$$

где  $\sigma_0$  и  $n_0$  соответственно - сечение поглощения и концентрация ядер водорода (сечением поглощения кислорода можно пренебречь). Для раствора  $NaCl$  в воде получаем

$$N_1 = \frac{Q_1}{(\sigma_0 n_0' + \sigma' n') v'} \quad (10)$$

где  $\sigma'$  и  $n'$  - сечение поглощения и концентрация ядер хлора в растворе,  $n_0'$  - концентрация ядер водорода в растворе (сечением поглощения натрия можно пренебречь). Приближенно можно считать, что  $v_0 = v'$ , хотя, строго говоря, средняя скорость тепловых нейтронов в среде, содержащей дополнительные поглотители, несколько выше, чем без них.

Тогда

$$\frac{N_0}{N_1} = \frac{Q_0}{Q_1} \frac{\sigma_0 n_0' + \sigma' n'}{\sigma_0 n_0} \quad (11)$$

отсюда

$$\sigma' = \sigma_0 \left( \frac{N_0}{N_1} \frac{Q_1}{Q_0} - \frac{n_0'}{n_0} \right) \frac{n_0}{n'} \quad (12)$$

### Упражнение 1

Измерение пространственного распределения резонансных и тепловых нейтронов в воде и в растворе  $NaCl$  и определение сечения поглощения хлора

1. Измерить пространственное распределение резонансных нейтронов в чистой воде (при этом пластинка родия экранируется кадмием). Детектор помещается в ванне с чистой водой на расстоянии  $\sim 25 \text{ см}$  от источника нейтронов и передвигается через  $2-3 \text{ см}$  по направлению к источнику до минимально возможного расстояния от него. Время активации детектора, время переноса к счетчику Гейгера и время счета  $\beta$ -частиц распада выбирается, исходя из значений периодов полураспада родия (см. описание задачи "Искусственная радиоактивность" в сборнике "Ядерный специальный практикум" часть I).

2. Измерить пространственное распределение резонансных и тепловых нейтронов в чистой воде (используется родиевый детектор без кадмиевого экрана). Детектор устанавливается на тех же расстояниях от источника, что и в предыдущем случае. Распределение тепловых нейтронов может быть получено следующим образом:

$$J_T(r) = J_{T+p}(r) - J_p(r) \quad (13)$$

3. Измерить пространственное распределение резонансных нейтронов в растворе  $NaCl$  (пластинка родия экранируется кадмием).

4. Измерить пространственное распределение резонансных к тепловых нейтронов в растворе  $NaCl$  (родиевый детектор без кадмиевого экрана).



Распределение тепловых нейтронов вычисляется по формуле (13).

5. Измерить фон счетчика Гейгера, обусловленный космическим излучением и радиоактивным загрязнением. Значение фона вычитается из измеренных ранее активностей детектора.

6. Построить графики  $J(r)$  пространственного распределения резонансных нейтронов в чистой воде и растворе  $NaCl$ , тепловых нейтронов в чистой воде и в растворе  $NaCl$ . Необходимое для вычисления сечения поглощения по формуле (12) значение концентрации ядер хлора в растворе находится на основании измерений ареометром плотности раствора / 4 /. Сечение поглощения тепловых нейтронов водородом  $\sigma_0$  равно 0,3 барна.

7. Для обработки экспериментальных результатов воспользоваться методом приведенным в Дополнении.

8. При отсутствии программы:

а) Для определения отношения мощностей источников  $Q_1/Q_0$  построить графики  $f(r)=J_p(r) r^2$  для раствора  $NaCl$  и чистой воды. Отношение площадей, ограниченных кривыми на этих графиках, равно отношению полного числа резонансных нейтронов в растворе и в чистой воде и равно отношению мощностей источников нейтронов в ванне с раствором и в ванне с чистой водой.

б) Для определения сечения поглощения тепловых нейтронов хлором построить графики  $f(r)=J_p(r) r^2$  для чистой воды и для раствора  $NaCl$ . Отношение полного числа тепловых нейтронов в ваннах с чистой и соленой водой равно отношению площадей, ограниченных кривыми на этих графиках.

## Упражнение 2

Измерение пространственного распределения резонансных нейтронов в воде и определение возраста нейтронов

1. Измерить пространственное распределение резонансных нейтронов в чистой воде (пластинка родия экранируется кадмием). Активационный детектор помещается в ванне с чистой водой на расстоянии 25 см от источника нейтронов и передвигается через 2 см по направлению к источнику до минимально возможного расстояния.

Измерить фон счетчика Гейгера и его значение вычесть из результатов измерения активностей детектора.

Пользуясь дополнением обработать экспериментальные данные.

4. При отсутствии программы обработки:

а) построить график  $J_p(r) r^2$  в полулогарифмическом масштабе. Путем экстраполяции линейного участка найти значения величины  $J_p(r) r^2$  до  $r \sim 60$  см;

б) построить графики  $J_p(r) r^2$  и  $J_p(r) r^4$  в области  $0 < r < 60$  см в линейном масштабе, провести графическое интегрирование этих функций, и по формуле (4) определить возраст нейтронов.

## Контрольные вопросы

1. Каков энергетический спектр нейтронов, испускаемых источником? Чем обусловлен сплошной характер спектра?

2. В результате каких видов взаимодействия нейтронов с ядрами

окружающей источник среды происходит их замедление?

3. Какими свойствами должен обладать "хороший" замедлитель нейтронов?

4. Каково пространственное распределение нейтронов вокруг точечного источника и как оно изменяется по мере замедления нейтронов?

5. Каков физический смысл возраста нейтронов? Что такое полный возраст нейтронов? От каких характеристик замедлителя он зависит?

6. Какие нейтроны называются тепловыми?

7. Каково пространственное распределение тепловых нейтронов вокруг точечного источника быстрых нейтронов?

8. Каков физический смысл длины диффузии? От каких характеристик среды диффузия зависит наиболее сильно?

9. Каково среднее удаление нейтрона в конце процесса замедления и в результате диффузии от точечного источника быстрых нейтронов, находящегося в воде, если известно, что полный возраст равен  $50 \text{ см}^2$ , а длина диффузии  $3 \text{ см}$ ?

10. Каков принцип работы активационного детектора нейтронов?

## **Литература**

1. Глесстон С., Эдлунд М. — Основы теории ядерных реакторов. — М.: ИЛ., 1954.
2. Власов Н.А. Нейтроны. — М.: Наука, 1971.
3. Атлас нейтронных сечений. — М.: Атомиздат, 1959.
4. Кэй Дж., Лэби Т. — Таблицы физических и химических постоянных. — М.: Физматгиз, 1962.

## **Дополнение**

### **Обработка экспериментальных результатов**

1. Наилучший способ обработать экспериментальные данные - это воспроизвести их в рамках теоретической модели. Какие-то параметры модели могут быть взяты из надежных источников, а какие-то неизвестны и должны быть подобраны из требований наилучшего согласия с экспериментом.

Для получения плотности распределения нейтронов в среде можно записать уравнения диффузии, но задача получается многомерной - она должна учитывать перемещение нейтронов в пространстве, их замедление и поглощение, а поэтому не имеет простого аналитического решения. Однако могут быть получены асимптотические зависимости вблизи источника и на бесконечности (формула (5)):

$$J(r) \sim (1 - C r^2) \quad \text{при } r \rightarrow 0 \quad (14)$$

$$J(r) \sim \exp[-kr] / r^2 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (15)$$

Такие процессы легко моделируются методом Монте-Карло, но совмещение моделирования и одновременного определения параметров модели оказывается весьма трудоемкой задачей.

Для целей нашей задачи будет достаточно описание данных простой функциональной зависимостью, имеющей правильное асимптотическое поведение вблизи источника и на бесконечности (14 и 15) и минимально необходимое количество подгоночных параметров для достаточно точного описания экспериментальных данных.

Из этих соображений для интерполяции данных была выбрана функция

$$J(r) = \frac{A}{r^2} \left( \frac{1}{\cosh kr} - \frac{1}{\cosh \lambda kr} \right) \quad (16)$$

где параметр  $1.1 < \lambda < 2$  обеспечивает более быстрое убывание второго члена на бесконечности, что приводит к правильным асимптотикам (14 и 15).

Параметры  $A$ ,  $k$  и  $\lambda$  определяются из требования наилучшего совпадения с экспериментальными данными методом минимизации  $\chi^2$ , частным случаем которого является известный метод наименьших квадратов.

Затем вычисляются 2-й и 4-й моменты распределения, задаваемого формулой (16):

$$S = \int_0^{\infty} J_p(r) r^2 dr \quad (17)$$

$$D = \int_0^{\infty} r^2 J_p(r) r^2 dr \quad (18)$$

Программа написана на фортране.

2. Напомним некоторые основные положения метода наименьших квадратов.

Пусть  $F(x)$  есть некоторая функция независимой переменной  $x$ , зависящая от  $M$  параметров  $\{A_k\}_{k=1}^M$ :

$$F(x) = F(x; A_1, A_2, \dots, A_M), \quad (19)$$

для которой имеются экспериментальные значения  $\{Y_i\}_{i=1}^N$ , полученные в точках  $\{x_i\}_{i=1}^N$ , то есть

$$Y_i = F(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

где  $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^N$  - ошибки измерений. Кроме того, предполагаются известными оценки  $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$  - среднеквадратичных ошибок измерений во всех точках. Наиболее вероятные оценки значений параметров  $\{A_k\}_{k=1}^M$  могут быть получены из условия абсолютного минимума следующего квадратичного функционала:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N w_i (Y_i - F(x_i))^2 \quad (21)$$

где

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (22)$$

есть вес экспериментальной точки  $x_i$ .

Необходимые условия экстремума функционала (21) приводят к системе  $M$  уравнений относительно параметров  $\{A_k\}_{k=1}^M$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial A_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (23)$$

Если функция (19) линейна относительно всех параметров, система (23)

является системой  $M$  линейных уравнений относительно  $M$  неизвестных  $\{A_k\}_{k=1}^M$ . Решение этой системы дает искомые значения параметров.

Если же функция (19) не является линейной, решение системы (23) может быть найдено, например, методом последовательных приближений путем линеаризации функции (19) относительно параметров  $\{A_k\}_{k=1}^M$ . В качестве нулевого приближения возьмем в пространстве параметров некоторую точку  $\{A_k^{(0)}\}_{k=1}^M$  и представим функцию (19) в виде

$$F(x; A_1, \dots, A_M) = F(x; A_1^{(0)}, \dots, A_M^{(0)}) + \sum_{k=1}^M \frac{\partial F(x)}{\partial A_k} \Big|_{A=A^{(0)}} (A_k - A_k^{(0)}) \quad (24)$$

т.е. ограничимся в ряде Тейлора линейными членами. В этом приближении система уравнений (19) становится линейной относительно приращений параметров

$$\Delta A_k = A_k - A_k^{(0)} \quad (25)$$

и принимает вид

$$\sum_{l=1}^M G_{kl} \Delta A_l = B_k, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (26)$$

где

$$G_{kl} = \sum w_i P_k(x_i) P_l(x_i), \quad (27)$$

$$P_k(x) = \frac{\partial F(x; A_1, \dots, A_M)}{\partial A_k} \Big|_{A=A^{(0)}} \quad (28)$$

$$B_k = \sum_{i=1}^N w_i P_k(x_i) (Y_i - F(x_i; A_1^{(0)}, \dots, A_M^{(0)})) \quad (29)$$

Матрица  $G$  системы линейных уравнений (26) симметрична. Находя обратную матрицу  $G^{-1}$ , получаем решение системы в виде

$$\Delta A_l = \sum_{k=1}^M G_{lk}^{-1} B_k, \quad l = 1, 2, \dots, M \quad (30)$$

При этом первое приближение для значений параметров есть

$$A_k^{(1)} = A_k^{(0)} + \Delta A_k, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (31)$$

где  $\{A_k\}_{k=1}^M$  даются формулой (30).

Далее опять представляем  $F(x)$  в виде ряда Тейлора уже относительно точки  $\{A_k^{(1)}\}_{k=1}^M$ , ограничиваясь линейными членами. Подставляя его в (23), опять приходим к системе линейных уравнений вида (26). Решая ее, находим вектор поправок к первому приближению (26) значений параметров.

Продолжая дальше этот итерационный процесс, будем получать все более точные значения параметров, если этот процесс сходится к абсолютному минимуму функционала  $\chi^2$ . Критерием его окончания может служить постоянство  $\chi^2$  с заданной точностью при переходе к очередной итерации. При этом вектор приращений параметров  $\{\Delta A_k\}_{k=1}^M$  будет мало отличаться от нулевого вектора.

Как известно, **дисперсионной матрицей** (матрицей ошибок) совокупности случайных величин  $\{y_{ij}\}_l^m$  называется матрица

$$D\{y_k, y_{k'}\} = E\{(y_k - E\{y_k\})(y_{k'} - E\{y_{k'}\})\} \quad (32)$$

где  $E\{x\}$  - математическое ожидание или среднее значение случайной величины  $x$ . Диагональные элементы этой матрицы являются дисперсиями компонент случайного вектора  $\{y_{ij}\}_I^m$ :

$$\sigma_k^2 = D\{y_k, y_k\} = E\{(y_k - E\{y_k\})^2\} \quad (33)$$

а недиагональные элементы являются корреляционными моментами различных пар компонент этого вектора. **Коэффициентом корреляции** случайных переменных  $y_k$  и  $y_{k'}$  называется величина

$$\rho_{kk'} = \frac{D\{y_k, y_{k'}\}}{\sigma_k \sigma_{k'}} \quad (34)$$

Легко проверить, что дисперсия линейной функции случайных переменных  $\{y_{ij}\}_I^m$

$$Z = \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i \quad (35)$$

где  $\{\alpha_{ij}\}_I^m$  - некоторые константы, полностью определяется дисперсионной матрицей (32):

$$D(Z) = \sum_{k,k'=1}^m \alpha_k D\{y_k, y_{k'}\} \alpha_{k'} \quad (36)$$

Найдем дисперсионную матрицу параметров  $\{A_{k'}\}_I^m$ . Из определения величин  $\Delta A_k$  следует, что

$$D\{A_k, A_{k'}\} = D\{\Delta A_k, \Delta A_{k'}\} \quad (37)$$

Из (30) и (29) видно, что  $\Delta A_k$  является линейной функцией случайных величин  $\{Y_i\}_I^N$ , а поэтому

$$D\{\Delta A_k, \Delta A_{k'}\} = \sum_{k,k'=1}^m G_{kl}^{-1} G_{k'l'} \sum w_i w_{i'} P_l(x_i) P_{l'}(x_{i'}) D\{Y_i, Y_{i'}\} \quad (38)$$

Если измерения  $\{Y_i\}_I^N$  в различных точках  $x_i$  некоррелированы, то

$$D\{Y_i, Y_{i'}\} = \sigma_i^2 \delta_{ii'}^2 \quad (39)$$

где  $\sigma_i$  - среднеквадратичная ошибка измерения в точке  $x_i$ . Подставляя (39) в (38) и принимая во внимание (37), (22) и (27), получаем

$$D\{A_k, A_{k'}\} = G_{kk'}^{-1} \quad (40)$$

Таким образом, матрица  $G^{-1}$ , обратная по отношению к матрице системы линейных уравнений (26), определяет как средние значения параметров (см.(30)), так и их дисперсионную матрицу. При этом дисперсия функции  $F(x; A_1, \dots, A_m)$  в линейном приближении согласно (36) есть

$$D\{F(x)\} = \sum_{k,k'=1}^m P_k(x) G_{kk'}^{-1} P_{k'}(x) \quad (41)$$

3. Мы видим, что задача обработки экспериментальных результатов методом наименьших квадратов сводится к решению системы линейных уравнений (26). Для вычисления коэффициентов и свободных членов, надо знать, как это видно из (27) и (29), производные (28) функции  $F(x; A_1, \dots, A_m)$  по всем параметрам.

Далее необходимо задать нулевое приближение  $A_1^{(0)}, \dots, A_m^{(0)}$  для подгоняемых параметров. Точность нахождения минимума -  $\varepsilon$  функционала  $\chi^2$  оценивают, сравнивая последовательные значения  $\chi^2$ . Считается, что величина ошибки  $\chi^2$  близка к изменению  $\chi^2$  при очередной итерации вблизи минимума.

В нашем случае начальное приближение выбирается следующим образом: параметру  $\lambda$  присваивается значение в середине разрешенной для него области; параметр  $k$  оценивается по приблизительной ширине распределения; а значение оставшегося нормирующего множителя  $A$  можно вычислить так, чтобы кривая проходила через экспериментальное значение функции в ближайшей к источнику точке. Значение  $k$  может также быть оценено, например, графическим способом.

Работа с программой показывает, что при выбранной параметризации, как правило, наблюдается хорошая сходимость

## **Обработка данных на компьютере**

### 1. Начало работы программы, ввод имени.

Выдается запрос на ввод имени студента. Студент вводит свою фамилию английскими буквами. Реально используются первые восемь. Если программа встречает имя впервые, то начинается ввод данных (см. п. Ввод данных). Если же студент уже работал или введенное имя совпало с введенным работавшим ранее, то выводятся на экран сохраненные результаты предыдущего сеанса (см. Редактирование данных).

### 2. Ввод данных.

Программа запрашивает интенсивность фона. Необходимо ввести количество фоновых событий за время измерения, выбранное для основных измерений.

После этого программа последовательно для всех четырех серий измерений (в воде, в воде с кадмиевым фильтром, в растворе соли и в растворе соли с использованием кадмиевого фильтра) запрашивает количество точек, в которых проводилось измерение, а после этого расстояние до источника (в сантиметрах) и зафиксированное количество событий для каждого измерения.

После завершения ввода имеется возможность просмотреть введенные значения и, при необходимости, внести исправления.

### 3. Просмотр и редактирование данных.

Программа выводит на экран данные для просмотра и предлагает их редактировать. Для этого предлагается ввести число, указывающее либо номер строки для редактирования, либо команду:

0 -- Если данные введены правильно и внесения исправлений не требуют.

\$<0\$ -- Если данные легче ввести заново, чем исправлять (см.п.2).

<номер существующей строки> - для исправления данных в указанной строке.

4. После ввода или редактирования данных программа выдает графики, на которых показаны экспериментальные точки (с оценкой ошибки) и кривая начального приближения. После нажатия "Enter" выдаются текущие значения параметров кривой, значение  $\chi^2$  и другая информация. После нажатия "Enter" снова выдается график после очередной итерации. Итерации продолжаются до достижения сходимости. После этого программа выдает полученные значения

интегралов  $\int r^2 f(r) dr$  и  $\int r^4 f(r) dr$ , оценку среднего квадрата расстояния и корень из него.

Таким образом, последовательно обрабатываются данные для распределения резонансных и тепловых нейтронов в воде и в растворе соли.